Wahyu

Siap OSN 2015

Olimpiade Sains Nasional

Matematika SMP

+Materi dasar OSN

+OSN 2003 - 2014:

Seleksi tingkat Kabupaten/Kota

Seleksi tingkat Provinsi

Seleksi tingkat Nasional

+Alternatif Penyelesaian

+Olimpiade Internasional

Siap 2015 OSN

Olimpiade Sains Nasional

Matematika SMP

SIAP OSN

MATEMATIKA SMP 2015

Penyusun : Wahyu

Buku ini diset dengan Times New Roman 12 pt

Desainer Sampul : Wahyu

Tata Letak : Wahyu

Tahun Terbit : 2014

Preliminary : viii

Halaman Isi : 314

Ukuran Buku : 17,6 cm × 25 cm

DISCLAIMER

SCHEMA

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum, puji syukur alhamdulillah ke hadirat Allah Subhanahu Wata'ala karena atas rahmat serta karunia-Nya penulis dapat menyusun Buku online ini. Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad Sallallahu'alaihi Wasallam, Nabi akhir jaman.

Olimpiade Sains Nasional adalah ajang kompetisi paling bergengsi dalam bidang sains bagi para siswa pada jenjang SD, SMP, dan SMA di Indonesia. Siswa yang mengikuti Olimpiade Sains Nasional adalah siswa yang telah lolos seleksi tingkat kabupaten dan provinsi dan karenanya adalah siswa-siswa terbaik dari provinsinya masing-masing.

Buku online berjudul "Siap OSN Matematika SMP 2015" ini berisikan materi dasar OSN dan kumpulan soal lengkap olimpiade matematika SMP tingkat Kabupaten/Kota, Provinsi, dan Nasional berikut alternatif penyelesaiannya.

Dengan terbitnya Buku online "Siap OSN Matematika SMP 2015" ini, penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Kedua orang tuaku yaitu Abina Abdullah dan Umina Tini serta abangku Kurniawan, atas pengertiannya selama penyusunan Buku online ini.
2. Dr. H. Hobri, M.Pd. (Pakar Pendidikan dan Dosen Matematika Universitas Jember) yang telah memberikan motivasi-motivasi berarti bagi penulis.
3. H. Ahmad Fausi, M.Pd. (Pembina Olimpiade Matematika SMP Negeri 1 Situbondo) atas arahan dan ide-ide ajaibnya.
4. Siswa SMPN 1 Situbondo dan SCHEMA (*School of Mathematics*) yang juga menjadi penyemangat penulis untuk menghadirkan buku-buku sederhana.

Besar harapan, hadirnya Buku online ini dapat menjadikan referensi bagus bagi siswa dan pengajar olimpiade matematika yang akan mematangkan diri untuk ikut serta dalam kompetisi matematika khususnya OSN Matematika SMP. Kritik dan saran sangat diharapkan agar terbitan berikutnya lebih baik. Selamat belajar dan melatih *skill* matematika kompetisi Anda.

Situbondo, September 2014

Wahyu

DAFTAR ISI

SINGKATAN

AIME	American Invitational Mathematics Examination
APMO	Asia Pasific Mathematics Olympiad
BMO	British Mathematical Olympiad
CHINA	China Mathematical Competitions for Secondary Schools
CHNMO	China Mathematical Olympiad
CMO	Canadian Mathematical Olympiad
IMO	International Mathematical Olympiad
OMITS	Olimpiade Matematika ITS
OSK	Olimpiade Sains Indonesia SMA/MA Tingkat Kabupaten/Kota
OSK SMP/MTs	Olimpiade Sains Indonesia SMP/MTs Tingkat Kabupaten/Kota
OSP	Olimpiade Sains Indonesia SMA/MA Tingkat Provinsi
OSP SMP/MTs	Olimpiade Sains Indonesia SMP/MTs Tingkat Provinsi
OSN	Olimpiade Sains Indonesia SMA/MA Tingkat Nasional
OSN SMP/MTs	Olimpiade Sains Indonesia SMP/MTs Tingkat Nasional
QAMT	Quenssland Association of Mathematics Teacher
SMO	Singapore Mathematical Olympiad
South California MC	South California Mathematics Contest
USAMTS	USA Mathematical Talent Search

NOTATIONS

$\mathbb{N}$	the set of positive integers (natural numbers)
$\mathbb{N}_0$	the set of non-negative integers
$\mathbb{Z}$	the set of integers
$\mathbb{Z}^+$	the set of positive integers
$\mathbb{Q}$	the set of rational numbers
$\mathbb{Q}^+$	the set of positive rational numbers
$\mathbb{Q}_0^+$	the set of non-negative rational numbers
$\mathbb{R}$	the set of real numbers
$[m, n]$	the lowest common multiple of the integers m dan n
(m, n)	the greatest common devisor of the integers m dan n
$a \mid b$	a devides b
$\|x\|$	absolute value of x
$\lfloor x \rfloor$	the greatest integer not greather than x
$\lceil x \rceil$	the least integer not less than x
$\{x\}$	the decimal part of x, i.e. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$
$a \equiv b \pmod{c}$	a is congruent to b modulo c
$\binom{n}{k}$	the binomial coefficient n choose k
$n!$	n factorial, equal to the product $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n$
$[a,b]$	the closed interval, i.e. all x such that $a \leq x \leq b$
(a,b)	the open interval, i.e. all x such that $a < x < b$
$\Leftrightarrow$	iff, if and only if
$\Rightarrow$	implies
$A \subset B$	A is a subset of B
$A — B$	the set formed by all the elements in A but not in B
$A \cup B$	the union of the sets A dan B
$A \cap B$	the intersection of the sets A dan B
$a \in A$	the element a belongs to the set A

BAB 1

ALJABAR

ALGEBRA

SUBBAB

- Operasi Aljabar
- Fungsi
- Persamaan
- Sistem Persamaan
- Barisan dan Deret
- Statistika

Ivan Panin

Dalam setiap keindahan, selalu ada mata yang memandang. Dalam setiap kebenaran, selalu ada telinga yang mendengar. Dalam setiap kasih, selalu ada hati yang menerima.

OPERASI ALJABAR

A. SUKU TUNGGAL DAN SUKU BANYAK

i. Bentuk aljabar $3a$, $-3ab^2$ disebut suku tunggal (monomi)

ii. Bentuk aljabar $-2x + 3y$ disebut suku dua (binom).

iii. Bentuk aljabar $mn - pq + 7$, dan $x^2 - xy + y^2$ disebut suku tiga (trinom).

iv. Bentuk aljabar yang terdiri lebih dari 3 suku disebut suku banyak (polinom). Contoh:

$2a - 3b + 4c - 5$, $x^3 - 2x^2 + 3x + 5$, dan $x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4xy + x + y + 2$.

Perhatikan bentuk $-2x^2y + 5$, -2 dan 5 disebut koefisien (tetapi secara umum "5" dianggap bilangan konstan sehingga disebut konstanta), x dan y disebut variabel atau peubah, dan angka 2 pada x^2 disebut pangkat atau derajat. Pada bentuk $-2x^2y$; -2, x, x^2, dan y disebut faktor dari $-2x^2y$.

B. SIFAT-SIFAT OPERASI ALJABAR

Jika m, n, dan p adalah bilangan bulat, maka:

1. $m + n = n + m$. (sifat komutatif pada penjumlahan)
2. $(m + n) + p = m + (n + p)$. (sifat asosiatif pada penjumlahan)
3. $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ (sifat distributif)
4. $m \cdot n = n \cdot m$. (sifat komutatif pada perkalian)
5. $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$. (sifat asosiatif pada perkalian)
6. $m + 0 = m$ (elemen identitas pada penjumlahan)
7. $m \cdot 1 = m$ (elemen identitas pada perkalian)
8. $m + (-m) = 0$ (invers penjumlahan)
9. $m \cdot \frac{1}{m} = 1$ (invers perkalian)
10. Jika $m \cdot n = m \cdot p$ dan $m \neq 0$, maka $n = p$ (pencoretan)

C. PEMANGKATAN BENTUK ALJABAR

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

$(a + b)^4 = (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^3$

$(a - b)^4 = (a - b)(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = x^4 - 4x^3 + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^3$

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

D. BENTUK FAKTORISASI KHUSUS

1. Jumlah dan selisih dari dua bentuk aljabar kuadrat.

   a. $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

   b. $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$

   c. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

2. Jumlah dan selisih dari dua bentuk aljabar kubik.

   a. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - 2xy + y^2)$

   b. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + 2xy + y^2)$

   c. $x^3 + y^3 = (x^2 + y^2)(x + y) - xy(x + y) = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$

   d. $x^3 - y^3 = (x^2 + y^2)(x - y) - xy(x - y) = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$

3. Jumlah dan selisih dari dua bentuk aljabar berpangkat n.

   a. $x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$ $\rightarrow n \in$ ganjil

   b. $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$ $\rightarrow n \in \mathbb{N}$

   Contoh

   Salah satu faktor dari $17^3 - 5^3$ adalah ...

   Jawab:

   $17^3 - 5^3 \rightarrow a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$17^3 - 5^3 = (17 - 5)(17^2 + 17 \times 5 + 5^2)$

$= 12\ (289 + 85 + 25)$

$= 12 \times 399$

$= 12\ (399).$

Jadi, salah satu faktor dari $17^3 - 5^3$ adalah 399.

E. PEMFAKTORAN BENTUK ALJABAR

Berikut adalah rumus-rumus perkalian istimewa.

$a(c \pm d) = ac \pm cd$

$(a \pm b)(a + b) = (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$

Contoh

Temukan nilai $\sqrt{5050^2 - 4950^2}$.

Jawab:

$\sqrt{5050^2 - 4950^2} = \sqrt{(5050 + 4950)(5050 - 4950)}$

$= \sqrt{10000 \times 100}$

$= \sqrt{1000000} = 1000$

1. Bentuk $ax^2 + bx + c$ dengan $a = 1$

$ax^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$

$ax^2 + bx + c = x^2 + (p + q)x + p \cdot q$

Dengan demikian, diperoleh hubungan sebagai berikut.

$b = (p + q)$ dan $c = pq$

Contoh

Faktorkanlah: $x^2 + 3x - 4$.

Jawab (dengan cara langsung).

$x^2 + 3x - 4$ dengan $b = 3$ dan $c = -4$. Diperoleh:

$p + q = 3$ dan $pq = -4$ $\rightarrow$ $p = 4$ dan $q = -1$

Hal ini berarti: $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$

2. Bentuk $ax^2 + bx + c$ dengan a ÷ 1

Anggap, $$ax^2 + bx + c = \frac{(ax+P)(ax+Q)}{a}$$

$$a(ax^2 + bx + c) = (ax + P)(ax + Q)$$

$$a^2x^2 + abx + ac = a^2x + a(ax + P)x + PQ$$

Dari hubungan di atas, diperoleh:

$$b = (P + Q) \text{ dan } ac = PQ$$

Contoh

Faktorkanlah: $3x^2 - 4x - 4$

Cara kreatif.

Cara ini merupakan pengembangan dari cara langsung, yaitu sebagai berikut.

Nilai $P = -6$ dan $Q = 2$ yang habis dibagi $a = 3$ adalah $P = -6$. Hali ini berarti:

$$3x^2 - 4x - 4 = \left(3x + \frac{2}{1}\right)\left(x - \frac{6}{3}\right)$$

Jadi, $3x^2 - 4x - 4 = (3x + 2)(x - 2)$ atau $3x^2 - 4x - 4 = (x - 2)(3x + 2)$.

F. OPERASI HITUNG PADA PECAHAN KOMPLEKS

A. Pecahan kompleks biasa

Sederhanakan $\dfrac{\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}}{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}}$

$$\frac{\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}}{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}} = \frac{\dfrac{(x+3)-(x+2)}{(x+2)(x+3)}}{\dfrac{(x+4)-(x+3)}{(x+3)(x+4)}} = \frac{x+3-x-2}{(x+2)(x+3)}\cdot\frac{(x+3)(x+4)}{x+4-x-3}$$

$$= \frac{1}{(x+2)(x+3)}\cdot\frac{(x+3)(x+4)}{1} = \frac{x+4}{x+2}$$

B. Pecahan bertumpuk

Tuliskkan pecahan bertumpuk $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{(x+1)-\dfrac{1}{x+2}}}$ sebagai pecahan aljabar biasa.

Jawab:

Bentuk pecahan aljabar ini bertumpuk di bawah, berarti kita mengerjakannya dari bawah ke atas, yaitu sebagai berikut:

$$\frac{1}{x-\dfrac{1}{(x+1)-\dfrac{1}{x+2}}} = \frac{1}{x-\dfrac{1}{\dfrac{(x+1)(x+2)-1}{(x+2)}}} = \frac{1}{x-\dfrac{x+2}{x^2+3x+2-1}}$$

$$= \frac{1}{x-\dfrac{x+2}{x^2+3x+1}} = \frac{1}{\dfrac{x(x^2+3x+1)-(x+2)}{(x^2+3x+1)}}$$

$$= \frac{x^2+3x+1}{x^3+3x^2+x-x-2} = \frac{x^2+3x+1}{x^3+3x^2-2}$$

Soal dan Pembahasan

1. Tentukan nilai r pada persamaan bentuk aljabar $(2x + 3y)(px + qy) = rx^2 + 23xy + 12y^2$.

   Jawab:

   $(2x + 3y)(px + qy) = rx^2 + 23xy + 12y^2$

   $2x \times (px + qy) + 3y \times (px + qy) = rx^2 + 23xy + 12y^2$

   $2px^2 + 2qxy + 3pxy + 3qy^2 = rx^2 + 23xy + 12y^2$

   $(2p)x^2 + (2q + 3p)xy + (3q)y^2 = rx^2 + 23xy + 12y^2$

   Dengan melihat kesesuaian letak ditemukan bahwa:

   $2p = r$

   $2q + 3p = 23$

   $3q = 12 \quad \rightarrow \quad$ untuk $q = 4$ diperoleh $3 \cdot 4 = 12$ (benar)

   Substitusikan $q = 4$ ke $2q + 3p = 23$.

   $2q + 3p = 23$

   $2 \cdot 4 + 3p = 23$

   $3p = 23 - 8 \quad \rightarrow \quad p = \dfrac{15}{3} = 5$

   Dengan demikian:

   $r = 2p \quad \rightarrow \quad r = 2 \cdot 5 = 10$

   Jadi, nilai r adalah 10.

2. Ketika tuan Felix dihadapkan dengan soal berbentuk:

   $\sqrt{2.374 \times 2.375 \times 2.376 \times 2.377 + 1}$

   Dia tidak mengalikan satu persatu bilangan-bilangan yang ada, yang dia lakukan adalah menjumlahkan 2.374 dengan kuadrat dari 2.375. Benarkah jawabannya? Bisakah jawabannya dipertanggungjawabkan untuk setiap bentuk dengan pola seperti itu?

   Jawab:

Misal: 2.374 = x, sehingga bentuk akar kuadrat di atas dapat ditulis menjadi:

Bukti (Bentuk umum aljabar).

$$\sqrt{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+1} = \sqrt{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+1}$$

$$= \sqrt{(x^2+x)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+1}$$

$$= \sqrt{(x^3+3x^2+2x)\cdot(x+3)+1}$$

$$= \sqrt{(x^4+6x^3+11x^2+6x)+1}$$

$$= \sqrt{x^4+6x^3+11x^2+6x+1}$$

$$= \sqrt{(x^2+3x+1)\cdot(x^2+3x+1)}$$

$$= \sqrt{(x^2+3x+1)^2}$$

$$= x^2 + 3x + 1$$

$$= x^2 + 2x + x + 1$$

$$= x + (x^2 + 2x + 1)$$

$$= x + (x + 1)^2$$

Jadi, $\sqrt{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+1} = x + (x + 1)^2$.

3. Pak Idris mempunyai kebun apel berbentuk persegi dan Pak Halim mempunyai kebun semangka berbentuk persegipanjang. Ukuran panjang kebun semangka Pak Halim 10 m lebihnya dari panjang sisi kebun apel Pak Idris. Sedangkan lebarnya, 3 lebihnya dari panjang sisi kebun apel Pak Idris. Jika diketahui luas kebun Pak Halim adalah 450 m^2. Tentukan luas kebun apel Pak Idris?

   Jawab:

   Kebun Pak Indris: Persegi

   Kebun Pak Halim: Persegipanjang

Oleh karena itu, ukuran panjang dan lebar kebun Pak Halim dapat ditulis sebagai: Panjang = $x + 10$ dan Lebar = $x + 3$

Sehingga:

Luas kebun Pak Halim $= \text{Panjang} \times \text{Lebar}$

$= (x + 10) \times (x + 3)$

$= x \times (x + 3) + 10 \times (x + 3)$

$= x^2 + 3x + 10x + 30$

$450 = x^2 + 13x + 30$

$x^2 + 13x + 30 - 450 = 0$

$x^2 + 13x - 420 = 0$

Dengan cara pemfaktoran:

$x^2 + 13x - 420 = 0$

$(x + 28)(x - 15) = 0$

$x + 28 = 0$ atau $x - 15 = 0$

$x = -28$ atau $x = 15$

Dapat dilihat bahwa nilai x yang memenuhi adalah 15.

Dengan demikian, luas kebun Pak Idris adalah 225 m^2.

4. Seorang anak merahasiakan tiga bilangan. Dia hanya memberi tahu jumlah dari masing-masing dua bilangan tersebut secara berturut-turut adalah 28, 36, 44. Tentukan jumlah ketiga bilangan tersebut.

Jawab:

Misal tiga bilangan tersebut berturut-turut adalah a, b, dan c, maka:

$a + b = 28$

$b + c = 36$

$a + c = 44$ +

$2a + 2b + 2c = 108$

$2(a + b + c) = 108$

$$a + b + c = \frac{108}{2} = 2$$

Jadi, jumlah ketiga bilangan tersebut adalah $a + b + c = 2$.

5. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif yang memenuhi $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{4}{7}$.

   Nilai $m^2 + n^2$ adalah …

   Jawab:

   $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{4}{7} \quad \rightarrow \quad m + n = 4 \quad$ dan $\quad mn = 7$

   $(m + n)^2 = 4^2$

   $16 = m^2 + n^2 + 2mn$

   $16 = m^2 + n^2 + 2 \cdot 7$

   $16 = m^2 + n^2 + 14$

   $m^2 + n^2 = 16 - 14$

   $m^2 + n^2 = 2$

   Jadi, nilai $m^2 + n^2 = 2$.

6. Diberikan dua buah bilangan:

   $x = 201420142014 \times 2015201520152015$

   $y = 201520152015 \times 2014201420142014$

   Hitunglah nilai dari $(x - y)^{2015}$.

   Jawab:

   $x \;\; = 201420142014 \times 2015201520152015$

   $\quad\; = 2014(100010001) \times 2015(1000100010001)$

   $y \;\; = 201520152015 \times 2014201420142014$

   $\quad\; = = 2015(100010001) \times 2014(1000100010001)$

   Ternyata $x = y$, sehingga $(x - y)^{2015} = 0^{2015} = 0$.

   Jadi, nilai dari $(x - y)^{2015} = 0$.

7. Saat ini umur Agus dan umur Fauzan kurang dari 100 tahun. Jika umur Agus dan umur Fauzan ditulis secara berurutan, maka diperoleh suatu bilangan empat digit (angka) yang merupakan kuadrat sempurna. Dua puluh tiga tahun kemudian, jika umur mereka ditulis dengan cara yang sama, maka diperoleh bilangan empat digit lain yang juga merupakan kuadrat sempurna. Jika umur mereka diasumsikan merupakan bilangan bulat positif, berapakah umur mereka saat ini?

   Jawab:

   Umur Agus dan umur Fauzan kurang dari 100 tahun dan jika umur Agus dan umur Fauzan ditulis secara berurutan, maka diperoleh suatu bilangan empat digit (angka) yang merupakan kuadrat sempurna.

   Ini menunjukkan bahwa umur Agus dan umur Fauzan merupakan bilangan dua digit.

   Misal:

   Umur Agus = AB

   Umur Fauzan = CD

   Umut sekarang:

   $ABCD = x^2$

   $1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D = x^2 \qquad \ldots\ldots (1)$

   Umur pada 23 tahun kemudian:

   $(A + 2)(B + 3)(C + 2)(D + 3) = y^2$

   $(1000 \cdot A + 2000) + (100 \cdot B + 300) + (10 \cdot C + 20) + (D + 3) = y^2$

   $1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D + 2000 + 300 + 20 + 3 = y^2$

   $1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D + 2323 = y^2 \qquad \ldots\ldots (2)$

   Eliminasi (2) dengan (1):

$$
\begin{array}{rl}
1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D + 2323 & = y^2 \\
1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D & = x^2 \quad - \\
\hline
2323 & = y^2 - x^2 \\
101 \cdot 23 & = (y + x) \cdot (y - x)
\end{array}
$$

$y + x = 101$

$y - x = 23$ –

$2x = 78 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{78}{2} = 39$

$ABCD = x^2 = 39^2 = 1521 \quad \to \quad$ Umur Agus = AB = 15

Umur Fauzan = CD = 21

Jadi, Umur Agus adalah 15 tahun dan Umur Fauzan adalah 21 tahun.

8. Diberikan $a + b + c = 0$. Hitunglah nilai dari:

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$$

Jawab:

$a + b + c = 0 \quad \to \quad c = -(a + b)$

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$$

$$=\frac{1}{b^2+(a+b)^2-a^2}+\frac{1}{(a+b)^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-(a+b)^2}$$

$$=\frac{1}{b^2+a^2+2ab+b^2-a^2}+\frac{1}{a^2+2ab+b^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-a^2-2ab-b^2}$$

$$=\frac{1}{2b^2+2ab}+\frac{1}{2a^2+2ab}+\frac{1}{-2ab}$$

$$=\frac{1}{2b(a+b)}+\frac{1}{2b(a+b)}+\frac{1}{-2ab}$$

$$=\frac{1}{2b(a+b)}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{2ab}$$

$$=\frac{1}{2b(a+b)}\left(\frac{a+b}{ab}\right)-\frac{1}{2ab}$$

$$=\frac{1}{2ab}-\frac{1}{2ab}=0$$

FUNGSI

A. PENGERTIAN FUNGSI (PEMETAAN)

Pemetaan adalah relasi (hubungan) yang memasangkan setiap anggota domain dengan tepat satu anggota kodomain.

Notasi fungsi: $f : A \to B$ (dibaca fungsi f memetakan himpunan A ke himpunan B)

Himpunan A disebut **daerah asal** (*domain*)

Himpunan B disebut **daerah kawan** (*kodomain*)

Pasangan anggota A di B disebut **daerah hasil** (*range*)

B. MENENTUKAN BANYAK PEMETAAN

Jika $A = \{2, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{4, 6, 8, 9, 10\}$. Tentukan banyaknya pemetaan yang mungkin.

Jawab:

$A = \{2, 3, 5, 7\} \quad \to \quad n(A) = 4$

$B = \{4, 6, 8, 9, 10\} \quad \to \quad n(B) = 5$

Banyak pemetaan $f : A \to B$ ditentukan oleh rumus:

$$n(f : A \to B) = (n(B))^{n(A)}$$

Sehingga:

Banyak pemetaan $f : A \to B$ adalah:

$n(f : A \to B) = (5)^4 = 625$ pemetaan.

Banyak pemetaan $f : B \to A$ ditentukan oleh rumus:

$$n(f : B \to A) = (n(A))^{n(B)}$$

Sehingga:

Banyak pemetaan $f : B \to A$ adalah:

$n(f : B \to A) = (4)^5 = 256$ pemetaan.

Menentukan banyak korespondensi satu-satu

Jika $n(A) = n(B) = n$, banyak korespondensi satu-satu dari himpunan A ke himpunan B ditentukan oleh:

$$n(f : A \xrightarrow{1-1} B) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$$

C. MENULIS FORMULA/RUMUS FUNGSI

Jika notasi $f : x \rightarrow y$ kita tuliskan dalam bentuk rumus fungsi maka diperoleh $y = f(x)$.

Contoh

1. Jika $f(x) = x^2 - 4x$, tentukan $f(x - 3)$.

Jawab:

$f(x) = x^2 - 4x$

$f(x - 3) = (x - 3)^2 - 4(x - 3)$ (substitusikan $(x - 3)$ ke x)

$f(x - 3) = x^2 - 6x + 9 - 4x + 12$ (penjabaran)

$f(x - 3) = x^2 - 10x + 21$ (penyederhanaan)

2. Diberikan $r : 3t - 1 \rightarrow t$, tentukan $r(t)$.

Jawab:

$r : 3t - 1 \rightarrow t$, ditulis $r(3t - 1) = t$

Misalkan: $p = 3t - 1 \quad \Rightarrow \quad 3t = p + 1$

$$t = \frac{p+1}{3}$$

Substitusikan $t = \frac{p+1}{3}$ ke persamaan $r(3t - 1) = t$, diperoleh:

$r(p) = \frac{p+1}{3}$ atau $r(t) = \frac{t+1}{3}$

Jadi, formula fungsinya adalah $r(t) = \frac{t+1}{3}$.

D. MENGHITUNG NILAI FUNGSI

Menghitung nilai fungsi berarti kita mensubstitusi nilai variabel bebas ke dalam rumus fungsi sehingga diperoleh nilai variabel bergantungnya.

Contoh soal

Diberikan $T : 3t - 1 \rightarrow t$. Hitunglah:

a. Peta dari 2

b. Nilai fungsi T untuk $t = 5$

c. Nilai x, jika $T(x) = 0$ (juga disebut pembuat nol fungsi T)

Jawab:

$T(3t - 1) = t$, mula-mula kita harus mengubah $T(3t - 1)$ menjadi $T(p)$.

Misalnya, $3t - 1 = p \quad \Rightarrow \quad 3t = p + 1$

$$t = \frac{p+1}{3}$$

Substitusikan $t = \frac{p+1}{3}$ ke persamaan $T(3t - 1) = t$, diperoleh:

$T(p) = \frac{p+1}{3}$ atau $T(t) = \frac{t+1}{3}$

Sekarang rumus pemetaan adalah $T(t) = \frac{t+1}{3}$

a. Peta dari 2 berarti $T(2) = \frac{2+1}{3} \Rightarrow T(2) = 1$

   Jadi, peta dari 2 adalah 1.

b. Nilai fungsi T untuk $t = 5$ berarti $T(5) = \frac{5+1}{3} \Rightarrow T(5) = 2$

c. $T(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{3} = 0$

$$x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Soal dan Pembahasan

1. Fungsi f didefinisikan oleh $f(x) = ax + b$. jika bayangan dari –3 adalah –15 dan bayangan dari 3 adalah 9. Tentukan nilai dari $f(-2) + f(2)$.

Jawab:

Untuk $x = -3$

$f(-3) = -3a + b$

$-3a + b = -15 \quad \ldots (1)$

Untuk $x = 3$

$f(3) = 3a + b$

$3a + b = 9 \quad \ldots (2)$

Eleminasi (1) dan (2)

$$\begin{array}{r} -3a + b = -15 \\ 3a + b = 9 \\ \hline 2b = -6 \\ b = -3 \end{array} +$$

Trik praktis

Jika diketahui $f(x) = ax + b$, $f(m) = p$ dan $f(n) = q$ maka:

$$a = \frac{p-q}{m-n}$$

Jika diketahui $f(a) = s$ dan $f(b) = t$ maka:

$$f(c) = s + (c-a) \cdot \frac{t-s}{b-a}$$

Substitusikan $b = -3$ ke $3a + b = 9$.

$3a + b = 9$

$3a + (-3) = 9$

$3a = 12$

$a = \frac{12}{3} = 4$

Dari hasil pengerjaan di atas diperoleh rumus fungsi yaitu $f(x) = 4x - 3$.

Untuk $x = -2 \rightarrow f(-2) = 4 \cdot (-2) - 3 = -11$

Untuk $x = 2 \rightarrow f(2) = 4 \cdot (2) - 3 = 5$

$f(-2) + f(2) = -11 + 5 = -6$

Jadi, nilai dari $f(-2) + f(2) = -6$.

2. Jika f adalah fungsi linier, $f(1) = 2000$, dan $f(x + 1) + 12 = f(x)$, maka nilai $f(100) = ...$

Jawab:

$f(1) = 2000$

$f(x + 1) + 12 = f(x)$

$f(x + 1) = f(x) – 12$

Sehingga:

$f(x + 1) = f(x) – 12$

untuk $x = 1$

$f(x + 1) = f(x) – 12$

$f(1 + 1) = f(1) – 12$

$f(2) = 2000 – 12$

untuk $x = 2$

$f(x + 1) = f(x) – 12$

$f(2 + 1) = f(2) – 12$

$f(3) = (2000 – 12) – 12$

untuk $x = 3$

$f(x + 1) = f(x) – 12$

$f(3 + 1) = f(3) – 12$

$f(4) = (2000 – 2\cdot(12)) – 12$

untuk $x = 4$

$f(x + 1) = f(x) – 12$

$f(4 + 1) = f(4) – 12$

$f(5) = (2000 – 3\cdot(12)) – 12$

⋮

untuk $x = x$

$f(x + 1) = f(x) - 12$

$f(x + 1) = [2000 - (x - 1)(12)] - 12$

$f(x + 1) = [2000 - (12x - 12)] - 12$

$f(x + 1) = 2000 - 12x + 12 - 12$

$f(x + 1) = 2000 - 12x$

Maka:

$f(100) = f(99 + 1) \quad \rightarrow \quad x = 99$

$f(99 + 1) = 2000 - 12x$

$f(99 + 1) = 2000 - 12 \times 99$

$f(100) = 2000 - 1188 = 812$

Jadi, nilai $f(100) = 812$.

3. Jika f adalah fungsi sehingga $f(xy) = f(x - y)$ dan $f(6) = 1$, maka $f(-2) - f(4) =$..

Jawab:

Faktor positif dari 6 = {1, 2, 3, 6}

$f(xy) = f(x - y)$

$f(6 \cdot 1) = f(6 - 1)$

$f(6) = f(5)$

$1 = f(5) \quad \rightarrow \quad f(5) = 1$

$f(xy) = f(x - y)$

$f(5 \cdot 1) = f(5 - 1)$

$f(5) = f(4)$

$1 = f(4) \quad \rightarrow \quad f(4) = 1$

$f(xy) = f(x - y)$

$f(2 \cdot 3) = f(2 - 3)$

$f(6) = f(-1)$

$$1 = f(-1) \quad \rightarrow \quad f(-1) = 1$$

$$f(xy) = f(x - y)$$

$$f(-1\cdot 1) = f(-1 - 1)$$

$$f(-1) = f(-2)$$

$$1 = f(-2) \quad \rightarrow \quad f(-2) = 1$$

Jadi, $f(-2) - f(4) = 1 - 1 = 0$.

4. $f(x) = \dfrac{2x-4}{x}$, $x \neq 0$ dan x bilangan real, maka $f^{2009}(6) = ...$

Catatan: Notasi $f^2(x) = f(f(x))$, notasi $f^3(x) = f(f(f(x)))$, dan seterusnya.

Jawab:

$$f(6) = \frac{2\cdot 6 - 4}{6} = \frac{4}{3}$$

$$f^2(6) = f\left(f(6)\right) = \frac{2\cdot\frac{4}{3} - 4}{\frac{4}{3}} = -1$$

$$f^3(6) = f\left(f\left(f(6)\right)\right) = \frac{2\cdot(-1) - 4}{(-1)} = 6$$

$$f^4(6) = f\left(f^3(6)\right) = \frac{2\cdot 6 - 4}{6} = \frac{4}{3}$$

$$f^5(6) = f\left(f^4(6)\right) = \frac{2\cdot\frac{4}{3} - 4}{\frac{4}{3}} = -1$$

$$f^6(6) = f\left(f^5(6)\right) = \frac{2\cdot(-1) - 4}{(-1)} = 6$$

$\vdots$

Berpola 3 pada bilangan pangkatnya

Jadi, untuk menentukan nilai fungsi pada pola ke- 2009, kita dapat melakukan pembagian oleh 3 pada pangkatnya.

Perhatikan tabel berikut

Pola ke-	$f(x)=\frac{2x-4}{x}$	Sisa bagi oleh 3	Hasil
1	$f(6)$	1	$\frac{4}{3}$
2	$f^2(6)$	2	–1
3	$f^3(6)$	0	6
4	$f^4(6)=f^{1\cdot 3+1}(6)$	1	$\frac{4}{3}$
5	$f^5(6)=f^{1\cdot 3+2}(6)$	2	–1
6	$f^6(6)=f^{2\cdot 3+0}(6)$	0	6
⋮	⋮	⋮	⋮
2009	$f^{2009}(6)=f^{669\cdot 3+2}(6)$	2	–1

Jadi, nilai $f^{2009}(6) = -1$.

5. Diketahui n adalah bilangan bulat positif. Jika

$$f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

Tentukan $f(13) + f(14) + f(15) + \ldots + f(112)$

Jawab:

Sederhanakan bentuk $f(n)$ terlebih dahulu dengan mengalikan bentuk yang ada dengan sekawannya yaitu:

$$f(n) = \frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\cdot\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}$$

$$= \frac{4n\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)+\sqrt{4n^2-1}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)}{2}$$

$$= \frac{4n\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)+(2n+1)\sqrt{2n-1}-(2n-1)\sqrt{2n+1}}{2}$$

$$= \frac{2n\sqrt{2n+1}-2n\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}{2}$$

$$= \frac{(2n+1)\sqrt{2n+1}-(2n-1)\sqrt{2n-1}}{2}$$

dari sini diperoleh

$$f(13) = \frac{27\sqrt{27}-25\sqrt{25}}{2}$$

$$f(14) = \frac{29\sqrt{29}-27\sqrt{27}}{2}$$

$$f(13) = \frac{31\sqrt{31}-29\sqrt{29}}{2}$$

$$\vdots = \vdots$$

$$f(111) = \frac{223\sqrt{223}-221\sqrt{221}}{2}$$

$$f(112) = \frac{225\sqrt{225}-223\sqrt{223}}{2}$$

Sehingga:

$$f(13) + f(14) + f(15) + \ldots + f(111) + f(112) = \frac{225\sqrt{225}-25\sqrt{25}}{2}$$

$$= \frac{225\cdot 15-25\cdot 5}{2}$$

$$= \frac{3375-125}{2} = 1625$$

Jadi, nilai $f(13) + f(14) + f(15) + \ldots + f(112) = 1625$.

6. Diberikan $f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$. Hitung penjumlahan:

$$f\left(\frac{1}{1996}\right)+f\left(\frac{2}{1996}\right)+f\left(\frac{3}{1996}\right)+\ldots+f\left(\frac{1995}{1996}\right)$$

Jawab:

Ingat bahwa

$$f(1-x)=\frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}=\frac{9}{9+3\times 9^x}=\frac{3}{9^x+3}$$

Dari sini kita peroleh

$$f(x)+f(1-x)=\frac{9^x}{9^x+3}+\frac{3}{9^x+3}=1$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{1995} f\left(\frac{k}{1996}\right) &= \sum_{k=1}^{997}\left[f\left(\frac{k}{1996}\right)+f\left(\frac{1996-k}{1996}\right)\right]+f\left(\frac{998}{1996}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{997}\left[f\left(\frac{k}{1996}\right)+f\left(1-\frac{k}{1996}\right)\right]+f\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= 997+\frac{3}{3+3}\\ &= 997\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Jadi, $f\left(\frac{1}{1996}\right)+f\left(\frac{2}{1996}\right)+f\left(\frac{3}{1996}\right)+\ldots+f\left(\frac{1995}{1996}\right)=997\frac{1}{2}$.

PERSAMAAN LINEAR

A. PENGERTIAN PERSAMAAN

Persamaan linear satu variabel adalah persamaan berbentuk $ax + b = 0$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$, dan
x : variabel real
a : koefisien x
b : konstanta

Persamaan linear dua variabel adalah persamaan berbentuk $ax + by + c = 0$ dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$, dan a dan b tidak keduanya nol, dimana
x : variabel real
a : koefisien x
b : konstanta

Misalkan a, b, dan c bilangan real dan a, b keduanya tidak nol. Himpunan penyelesaian persamaan linear $ax + by = c$ adalah himpunan semua pasangan (x,y) yang memenuhi persamaan linear tersebut.

Sifat-sifat:

Misal l adalah persamaan linear, maka:

a. Penambahan dan pengurangan bilangan di kedua ruas persamaan l, tidak mengubah solusi persamaan tersebut.

b. Perkalian bilangan tidak nol di kedua ruas pada persamaan l, tidak mengubah solusi persamaan tersebut.

B. SELESAIAN PLDV

Penentuan solusi (penyelesaian) PLDV dapat dilakukan dengan menerka atau dengan melakukan operasi aljabar. Solusi PLDV dalam himpunan bilangan bulat dikenal sebagai persamaan *Diophantine*.

Contoh

Tentukan himpunan selesaian persamaan $x + 3y = 6$ untuk $x, y \in C$ (himpunan bilangan cacah).

Jawab:

Diketahui $x + 3y = 6$ dengan $x, y \in C$ (bilangan cacah)

Untuk $x = 0$ $\Leftrightarrow 0 + 3y = 6$

$\Leftrightarrow y = 2$

Untuk nilai x dan y yang lain dapat dilihat pada tabel berikut.

x	0	1	2	3	4	5	6	...
y	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	...
$x + 3y$	6	6	6	6	6	6	6	...

Untuk $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$, dan $x = 5$ berupa nilai-nilai pecahan (bukan bilangan cacah), yaitu $y = \frac{5}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, dan $y = \frac{1}{3}$ sehingga tidak memenuhi penyelesaian. Jadi, himpunan selesaiannya adalah {(0, 2), (3, 1), (6, 0), …}.

Soal dan Pembahasan

1. Andi dalam tiga hari berturut-turut membelanjakan uangnya untuk membeli keperluan sekolah. Pada hari Minggu dia menghabiskan $\frac{1}{2}$ dari uang yang dimilikinya. Pada hari Senin, dia menghabiskan uangnya Rp 4.000,00 lebih sedikit dari uang yang dibelanjakan hari Minggu. Sementara uang yang dibelanjakan pada hari selasa hanya $\frac{1}{3}$ dari belanja hari Senin. Sekarang dia masing memiliki uang sisa belanja sebanyak Rp 1.000,00. Tentukan uang Andi sebelum dibelanjakan.

   Jawab:

Diketahui:

Misal banyak uang Andi sebelum dibelanjakan = x rupiah, sehingga:

Belanja hari Minggu = $\frac{1}{2}x$

Belanja hari Senin = $\frac{1}{2}x - 4000$.

Belanja hari Selasa = $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 4000\right)$.

Untuk menyelesaiakan kasus ini, maka buat persamaan linearnya.

$$x = \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2} - 4.000\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 4.000\right) + 1.000 \text{ .... (1)}$$

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - 4.000 + \frac{x}{6} - \frac{4.000}{3} + 1.000$$

$6x = 3x + 3x - 24.000 + x - 8.000 + 6.000$

$6x = 7x - 26.000$

$x = 26.000$

Dengan demikian, uang Andi mula-mula adalah Rp 26.000,00

2. Disebuah desa, terdapat sepasang manula yang tinggal di rumah tua. Pada saat sensus penduduk awal tahun 2013, kakek dan nenek tersebut belum memiliki KTP. Untuk pembuatan KTP, kakek dan nenenk tersebut diminta data tanggal lahir mereka, tetapi mereka tidak pernah mengetahui tahun lahir mereka. Mereka hanya mengingat bahwa saat menikah, selisih umur mereka 3 tahun. Saat itu nenek berusia 20 tahun, yaitu 11 tahun setelah proklamasi. Dapatkah kita ketahui tahun lahir mereka?

Jawab:

Misal:

Umur kakek = K tahun

Umur nenek = N tahun

Tahun lahir kakek = TK

Tahun lahir nenek = TN

$K - N = 3$

Nenek berusia 20 tahun, yaitu 11 tahun sesudah proklamasi 1945. Jika sekarang awal tahun 2013 maka usia nenek adalah:

N = (20 – 11) + (2013 – 1945) atau N = 77 sehingga dengan $K - N = 3$ diperoleh $K = 80$.

Selanjutnya kita mendapatkan dugaan tahun lahir mereka dengan:

Tahun lahir + Usia = Tahun sekarang

Sehingga dugaan tahun lahir mereka adalah:

$TN + 77 = 2013$ dan $TK + 80 = 2013$

Bila persamaan (2) diselesaiakan maka $TN = 1936$ dan $TK = 1933$

Dengan demikian, tahun lahir nenek dan kakek adalah 1936 dan 1933.

3. Umur ayah 4 tahun yang lalu adalah 2/3 kali umur ayah pada c tahun yang akan datang, (c adalah bilangan bulat positif). Sekarang, umur ayah adalah 27 tahun lebihnya dari 1/5 umurnya pada 7 tahun yang lalu. Tentukan nilai c.

Jawab:

Misalkan umur ayah sekarang adalah x tahun.

Berdasarkan informasi masalah di atas, dapat dituliskan:

$$x - 4 = \frac{2}{3}(x + c) \quad \rightarrow \quad x = 2c + 12$$

$$x = \frac{1}{5}(x - 7) + 27 \quad \rightarrow \quad 4x - 128 = 0$$

$$\rightarrow \quad x = 32$$

Substitusikan $x = 32$ ke $x = 2c + 12$ diperoleh $32 = 2c + 12$ atau $c = 10$

Jadi, umur ayah saat ini adalah 32 tahun.

SPLDV

Bentuk umum SPLDV dapat diekpresikan dalam bentuk:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

Metode Substitusi (Metode {Pengganti)

Solusi (penyelesaian) dari Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) dengan metode substitusi (mengganti), berarti kita menggunakan PLDV dalam bentuk eksplisit: $y = mx + n$ atau $x = my + n$, disubstitusi ke bentuk implisit $ax + by + c = 0$ agar diperoleh persamaan linear satu variabel (PLSV).

Contoh

Jumlah dua bilangan adalah 41, sedang selisih kedua bilangan itu adalah 19. Berapa masing-masing bilangan itu?

Jawab:

$a + b = 41$

$a - b = 19 \quad \rightarrow \quad a = b + 19$

substitusikan $a = b + 19$ ke $a + b = 41$:

$a + b = 41$

$(b + 19) + b = 41$

$2b + 19 = 41$

$2b = 22$

$b = 11$

substitusikan $b = 11$ ke $a + b = 41$:

$a + 11 = 41$

$a = 41 - 11 = 30$

Jadi, kedua bilangan itu adalah 30 dan 11.

Metode Eliminasi (Metode Penghapus)

Metode eliminasi digunakan untuk menentukan solusi (x, y) pada SPLDV, jika PLDV keduanya dalam bentuk eksplisit ataupun keduanya dalam bentuk implisit. Di sini kita tinggal menetapkan variabel mana yang akan dieliminasi (dihapus) dahulu.

Contoh

Tiga T-shirt dan empat topi dijual seharga Rp 960.000,00. Dua T-shirt dan lima topi dijual Rp 990.000,00. Berapakah harga setiap T-shirt? Berapakah harga setiap topi?

Jawab:

Misal: T-shirt = x; Topi = y

Sehingga:

$3x + 4y = 960.000$

$2x + 5y = 990.000$

Eleminasi (2) dan (1):

$$\begin{array}{ll|l|l} 2x + 5y = 990.000 & & \times 3 & 6x + 15y = 2.970.000 \\ 3x + 4y = 960.000 & & \times 2 & \underline{6x + \ \ 8y = 1.920.000} \ - \\ & & & \quad 7y = 1.050.000 \ \Rightarrow \quad y = 150.000 \end{array}$$

substitusikan $y = 150.000$ ke $3x + 4y = 960.000$:

$$3x + 4y = 960.000 \quad \Rightarrow \quad 3x = 960.000 - 4y$$

$$3x = 960.000 - 4 \cdot 150.000$$

$$3x = 960.000 - 600.000$$

$$x = \frac{360.000}{3} = 120.000$$

Jadi, harga sebuah T-shirt adalah Rp 120.000,00 dan sebuah topi adalah Rp 150.000,00.

Soal dan Pembahasan

1. Jika diketahui sistem persamaan linear dua variabel $1234567x + 7654321y = 3456789$ dan $7654321x + 1234567y = 9876543$. Bagaimana cara menentukan nilai $x^2 - y^2$?

Jawab:

$$\begin{array}{l} 1234567x + 7654321y = 3456789 \\ \underline{7654321x + 1234567y = 9876543}\ + \end{array}$$

$$(1234567 + 7654321)x + (1234567 + 7654321)y = 3456789 + 9876543$$

$$(7654321 + 1234567) \cdot (x + y) = 3456789 + 9876543$$

$$x + y = \frac{3456789 + 9876543}{1234567 + 7654321} = \frac{13333332}{8888888}$$

$$\begin{array}{l} 1234567x + 7654321y = 3456789 \\ \underline{7654321x + 1234567y = 9876543}\ - \end{array}$$

$$(1234567 - 7654321)x + (7654321 - 1234567)y = 3456789 + 9876543$$

$$(1234567 - 7654321) \cdot (x - y) = 3456789 - 9876543$$

$$x - y = \frac{3456789 - 9876543}{1234567 - 7654321} = \frac{6419754}{6419754} = 1$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x + y)(x - y) \\ &= \frac{13333332}{8888888} \cdot 1 \\ &= \frac{13333332}{8888888} \\ &= \frac{3 \cdot 4444444}{2 \cdot 4444444} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Jadi, $x^2 - y^2 = \dfrac{3}{2}$

2. Suatu hari perbandingan jumlah uang Netty dan Agit adalah 2 : 1. Sehari kemudian Netty memberikan uangnya sejumlah Rp100.000,00 kepada Agit. Sekarang perbandingan uang Netty dan Agit adalah 1 : 3. Jumlah uang Netty sekarang adalah Rp. ...

Jawab:

Misal:

Uang Netty mula-mula = N

Uang Agit mula-mula = A

$$\frac{N}{A} = \frac{2}{1}$$

$N = 2A$

$$A = \frac{N}{2}$$

$$\frac{(N - 100000)}{(A + 100000)} = \frac{1}{3}$$

$3(N - 100000) = 1(A + 100000)$

$3N - 300000 = A + 100000$

$3N - A = 100000 + 300000 = 400000$

Substitusikan $A = \frac{N}{2}$ ke persamaan $3N - A = 400000$:

$3N - A = 400000$

$$3N - \frac{N}{2} = 400000$$

$$\frac{6N}{2} - \frac{N}{2} = 400000$$

$$\frac{5N}{2} = 400000$$

$5N = 800000$

$N = \frac{800000}{5} = 160000$

Jadi, jumlah uang Netty sekarang adalah 160000 – 100000 = 60000

3. Selesaikan sistem persamaan dari

$$\begin{cases} \frac{x-y}{5} - \frac{x+y}{4} = \frac{1}{2}, \\ 2(x-y) - 3(x+y) + 1 = 0. \end{cases}$$

Jawab:

Cara I:

Operasikan persamaan untuk menentukan satu variabel

Sederhanakan persamaan pertama, kita peroleh $4(x - y) - 5(x + y) = 10$

$$x + 9y = -10 \ldots (1)$$

Sederhanakan persamaan kedua, kita peroleh $x + 5y = 1$

dengan (1) – (2)

$4y = -11$, demikian sehingga $y = -\frac{11}{4}$

Dari (2), $x = 1 - 5y = 1 + \frac{55}{4} = \frac{59}{4}$. Sehingga, $x = \frac{59}{4}$, $y = -\frac{11}{4}$

Cara II:

Substitusikan untuk menghilangkan satu variabel

Dari persamaan pertama kita peroleh

$x = -10 - 9y$

substitusikan (3) ke persamaan kedua, kita dapatkan

$2(-10 - 9y - y) - 3(-10 - 9y + y) + 1 = 0$

$4y = -11$, demikian sehingga $y = -\frac{11}{4}$

Dengan mensubstitusikannya kembali (3), kita dapatkan $x = -10 + \frac{99}{4} = \frac{59}{4}$.

Sehingga, $x = \frac{59}{4}$, $y = -\frac{11}{4}$

4. Selesaikan sistem persamaan untuk (x, y), dan temukan nilai k.

$$x + (1 + k)y = 0 \quad \text{... (1)}$$

$$(1 - k)x + ky = 1 + k \quad \text{... (2)}$$

$$(1 + k)x + (12 - k)y = -(1 + k) \quad \text{... (3)}$$

Jawab:

Untuk menghilangkan k dari persamaan, (2) + (3), kita peroleh

$$2x + 12y = 0 \quad \text{... } x = -6y \quad \text{... (4)}$$

Dengan mensubstitusikan (4) ke (1), kita peroleh $(k - 5)y = 0$. Jika $k \neq 5$, maka $y = 0$ dan juga $x = 0$. Dari (2) kita peroleh $k = -1$.

Jika $k = 5$, (2) mengakibatkan $(1 - 4)(-6y) + 5y = 6$, jadi $y = \frac{6}{29}$, $x = -\frac{36}{29}$

BARISAN DAN DERET

A. BARISAN BILANGAN

Susunan bilangan yang dibentuk menurut pola atau aturan tertentu.

Pada barisan: 2, 4, 6, 8, 10, …

2 $\rightarrow$ U_1 (suku pertama)

4 $\rightarrow$ U_2 (suku kedua)

6 $\rightarrow$ U_3 (suku ketiga)

8 $\rightarrow$ U_4 (suku keempat)

10 $\rightarrow$ U_5 (suku kelima)

$\vdots$

n $\rightarrow$ U_n (suku ke- n)

Barisan kadang-kadang didefinisikan dengan rumus:

Tentukan tiga suku pertama jika suku umumnya dirumuskan sebagai $U_n = 2n^2 - 1$.

Jawab:

Untuk $n = 1 \rightarrow U_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$

$n = 2 \rightarrow U_1 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$

$n = 3 \rightarrow U_1 = 2 \cdot 3^2 - 1 = 17$

Jadi, tiga suku pertama barisan tersebut adalah 1, 7, 17.

B. BARISAN ARITMETIKA

Barisan dengan dua suku berurutan yang selalu mempunyai beda yang tetap (konstan).

Perhatikan barisan 1, 3, 5, 7, …

$U_2 = U_1 + 2$ = 1 + 2 = 3

$U_3 = U_2 + 2$ = 3 + 2 = 5

$U_4 = U_3 + 2$ = 5 + 2 = 7, dan seterusnya

Perhatikan bahwa, suku berikutnya selalu diperoleh dengan menambahkan bilangan konstan (yaitu 2) pada suku sebelumnya. Bilangan tetap (konstan) itu disebut beda barisan dan dinotasikan dengan ***b***.

Menentukan beda/selisih pada barisan aritmetika:

$$b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = \ldots = U_n - U_{n-1}$$

Rumus suku ke- *n*:

$$U_n = U_1 + (n-1)b$$

C. BARISAN GEOMETRI

Barisan dengan dua suku berurutan yang selalu mempunyai rasio yang tetap (konstan).

Perhatikan barisan 1, 2, 4, 8, …

$U_2 = U_1 \times 2$ = 1 × 2 = 2

$U_3 = U_2 \times 2$ = 2 × 2 = 4, dan seterusnya

Perhatikan bahwa, suku berikutnya selalu diperoleh dengan cara mengalikan suku sebelumnya dengan bilangan konstan (yaitu 2). Bilangan tetap (konstan) itu disebut rasio barisan dan dinotasikan dengan ***r***.

Menentukan rasio pada barisan geometri:

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = \ldots = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

Rumus suku ke- *n*:

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

D. DERET

Penjumlahan berurut suku-suku dari suatu barisan

i. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + …

ii. 4 + 9 + 14 + 19 + 24 + …

iii. 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + …

iv. $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots$

v. $U_1+U_2+U_3+U_4+\ldots+U_n$

E. DERET ARITMETIKA

Jika $U_1, U_2, U_3 \ldots$ barisan aritmetika, maka $U_1+U_2+U_3+\ldots$ merupakan deret aritmetika. Jumlah n suku pertama barisan aritmetika adalah:

$$S_n=\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)b\right]$$

Dengan:

a = suku pertama

b = beda/selisih

n = nomor suku (suku ke- ...)

Contoh.

Diberikan deret aritmetika 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + …. Tentukan jumlah 5 suku pertama dan jumlah 100 suku pertama.

Jawab:

Deret aritmetika: 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + …

$a = 2$ $\rightarrow$ suku pertama

$b = 2$ $\rightarrow$ beda/selisih

Dengan menggunakan rumus di atas diperoleh:

Untuk $n = 5$ $\rightarrow$ $S_5=\frac{5}{2}\left[2\cdot 2+(5-1)\cdot 2\right]$ = 30

Untuk n = 100 $\rightarrow$ $S_{100} = \frac{100}{2}\left[2\cdot 2+(100-1)\cdot 2\right]$ = 10.100

Jadi, jumlah 5 suku pertama dan jumlah 100 suku pertama berturut-turut adalah 30 dan 10.100.

F. DERET GEOMETRI

Jika $U_1, U_2, U_3 \ldots$ barisan aritmetika, maka $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots$ merupakan deret geometri. Jumlah n suku pertama barisan geometri adalah:

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}, \; r < 1 \text{ (untuk } r < 1)$$

atau

$$S_n = \frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}, \; r > 1 \text{ (untuk } r > 1)$$

Dengan:

a = suku pertama

r = rasio/pembanding

n = nomor suku (suku ke- ...)

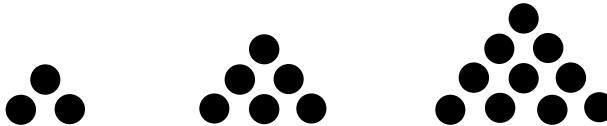
Contoh.

Tentukan jumlah 7 suku pertama dari deret geometri 2 + 4 + 8 + 16 + …..

Jawab:

Deret geometri: 2 + 4 + 8 + 16 + ….

a = 2 $\rightarrow$ suku pertama

r = 2 $\rightarrow$ rasio (r > 1)

Dengan menggunakan rumus di atas (untuk r > 1) diperoleh:

Untuk n = 7 $\rightarrow$ $S_7 = \frac{2\cdot\left(2^7-1\right)}{2-1} = \frac{2\cdot(128-1)}{1}$ = 2 · 127 = 254

Jadi, jumlah 7 suku pertama adalah 254.

Soal dan Pembahasan

1. Tentukan banyak lingkaran pada pola ke- 10, 100, n pada pola berikut untuk sebarang n bilangan bulat positif.

Jawab:

3, 6, 10, … (disebut juga pola bilangan segitiga)

(1 + 2), (1 + 2 + 3), (1 + 2 + 3 + 4), …

Perhatikan bahwa:

l_1: → 1

l_2: → 1 + 2

l_3: → 1 + 2 + 3

l_4: → 1 + 2 + 3 + 4

Diketahui deret bilangan di atas merupakan deret aritmetika dengan:

a (suku pertama) = 1

b (beda/selisih) = 1

dengan rumus jumlah sampai suku ke-n:

$$S_n = \frac{n}{2}\cdot\left(2a+(n-1)b\right)$$

$$S_{10} = \frac{n}{2}\cdot\left(2\cdot 1+(n-1)\cdot 1\right)$$

$$= \frac{n}{2}\cdot\left(2+n-1\right)$$

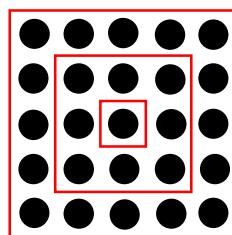
$$= \frac{n}{2}\cdot\left(n+1\right) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dengan demikian:

Banyak lingkaran pada pola ke- 10:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_{10} = \frac{10(10+1)}{2} = 5 \times 11 = 55.$$

Banyak lingkaran pada pola ke- 100:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_{100} = \frac{100(100+1)}{2}$$

$$S_{100} = 50 \times 101 = 5050$$

Banyak lingkaran pada pola ke- n: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. Dengan memperhatikan bola-bola yang dibatasi garis merah, tentukan:

Perhatikan bahwa:

Pola ke- 1: 1

Pola ke- 2: 8 = 9 – 1 $\rightarrow$ 8 · (2 – 1)

Pola ke- 3: 16 = 25 – 9 $\rightarrow$ 8 · (3 – 1)

Pola ke- 4: 24 = 49 – 25 $\rightarrow$ 8 · (4 – 1)

⋮

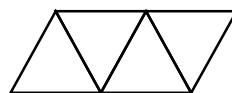
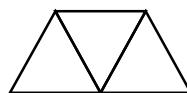
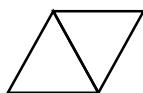
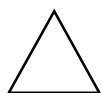
Pola ke- n: $(2n - 1)^2 - (2n - 3)^2 \rightarrow 8 \cdot (n - 1)$

Dengan demikian:

a. Banyak bola pada pola ke- 100

Jawab:

$$(2 \cdot 100 - 1)^2 - (2 \cdot 100 - 3)^2 = (200 - 1)^2 - (200 - 3)^2$$
$$= 199^2 - 197^2$$
$$= (199 + 197) \cdot (199 - 197)$$
$$= 396 \cdot 2 = 792$$

b. Jumlah bola hingga pola ke- 100

Jawab:

$$S_n = (2n - 1)^2$$

$$S_{100} = (2 \cdot 100 - 1)^2$$
$$= (200 - 1)^2$$
$$= (199)^2$$
$$= 39.601$$

Jadi, umlah bola hingga pola ke- 100 adalah 39.601.

3. Masing-masing segitiga berikut terbentuk dari 3 stik. Dengan memperhatikan pola berikut, tentukan banyak stik pada pola ke- 10, 100, dan ke- n untuk sebarang n bilangan bulat positif.

Jawab:

Pola ke- 1: 3 → $2 \cdot 1 + 1$

Pola ke- 2: 5 → $2 \cdot 2 + 1$

Pola ke- 3: 7 → $2 \cdot 3 + 1$

Pola ke- 4: 9 → $2 \cdot 4 + 1$

⋮

Pola ke- n: → $2n + 1$

Banyak stik pada pola ke- 10: 2 · 10 + 1 = 21

Banyak stik pada pola ke- 100: 2 · 100 + 1 = 201

Banyak stik pada pola ke-n: 2n + 1

Dengan memperhatikan pola berikut, tentukan:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+(pola\ ke\text{-}\ n)$$

a. Tiga pola berikutnya

Jawab:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}\ldots$$

b. Pola bilangan ke- n untuk sebarang n bilangan bulat positif

Jawab:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

c. Jumlah bilangan ke- n untuk sebarang n bilangan bulat positif

Jawab:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$= 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

4. Tentukan nilai $p = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots$

Jawab:

$$p = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots$$

$$3p = 1+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots\right)}_{p}$$

$3p = 1 + p$

$2p = 1$

$p = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $\rightarrow$ artinya nilai p didekati/mendekati 0,5.

Soal di atas juga dapat dikerjakan dengan menggunakan rumus $\frac{a}{1-r}$ dengan a adalah suku pertama dan r adalah rasio.

5. Tentukan nilai $y = x + 13 + x + 23 + x + 33 + \ldots + x + 1.003$!

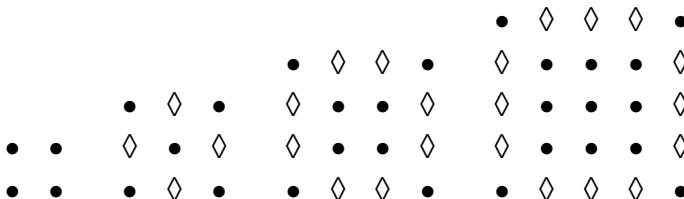
   Jawab:

   $y = x + 13 + x + 23 + x + 33 + \ldots + x + 1.003$

   $y = \underbrace{(x + x + x + \ldots + x)}_{n\ =\ 100} + 13 + 23 + 33 + \ldots + 1.003$

   $y = 100x + (10 + 3 + 20 + 3 + 30 + 3 + \ldots + 1.000 + 3)$

   $y = 100x + (10 + 20 + 30 + \ldots + 1.000 + 3 + 3 + 3 + \ldots + 3)$

   $y = 100x + (10 + 20 + 30 + \ldots + 1.000) + (3 + 3 + 3 + \ldots + 3)$

   $y = 100x + 10 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 100) + \underbrace{(3 + 3 + 3 + \ldots + 3)}_{n\ =\ 100}$

   $y = 100x + 10 \cdot 5.050 + 300$

   $y = 100x + 50.500 + 300 = 100x + 50.800$

   Jadi, $y = x + 13 + x + 23 + x + 33 + \ldots + x + 1.003 = 100x + 50.800$.

6. Perhatikan gambar berikut.

   ● ◊ ◊ ◊ ●
   ● ◊ ◊ ● ◊ ● ● ● ◊
   ● ◊ ● ◊ ● ● ◊ ◊ ● ● ● ◊
   ● ● ◊ ● ◊ ◊ ● ● ◊ ◊ ● ● ● ◊
   ● ● ● ◊ ● ● ◊ ◊ ● ● ◊ ◊ ◊ ●

   Banyaknya bulatan hitam pada gambar kesepuluh nantinya adalah ...

   Jawab:

Gambar I : 4 bulatan hitam

Gambar II : 5 bulatan hitam

Gambar III : 8 bulatan hitam

Gambar IV : 13 bulatan hitam

Perhatikan polanya:

Ke- 1 $\rightarrow$ $4 = 4 + 0 = 4 + (1 - 1)^2$

Ke- 2 $\rightarrow$ $5 = 4 + 1 = 4 + (2 - 1)^2$

Ke- 3 $\rightarrow$ $8 = 4 + 4 = 4 + (3 - 1)^2$

Ke- 4 $\rightarrow$ $13 = 4 + 9 = 4 + (4 - 1)^2$

....

$n = \rightarrow 4 + (n - 1)^2$

maka untuk $n = 10$ ke $n = \rightarrow 4 + (n - 1)^2$.

$\Leftrightarrow 4 + (10 - 1)^2$

$\Leftrightarrow 4 + 81$

$\Leftrightarrow 4 + 81 = 85$

Jadi, banyaknya bulatan hitam pada gambar kesepuluh nantinya adalah 85.

7. Nilai jumlahan bilangan berikut adalah ...

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - ... - 2010^2 + 2011^2$

Jawab:

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - ... - 2010^2 + 2011^2$

$1 \; - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + ... - 2010^2 + 2011^2$

$-3 \quad -7 \quad -11 \quad - ... - 2010^2 + 2011^2$

$a = -3$

$b = -7 - (-3) = -7 + 3 = -4$

Merupakan deret aritmatika dengan suku pertama = –3 dan beda = –4

$n = \frac{2010}{2} = 1005$

$Sn = \frac{n}{2} \cdot \left(2a + (n-1)b\right)$

$= \frac{1005}{2} \cdot \left(2 \cdot (-3) + (1005-1)(-4)\right)$

$= \frac{1005}{2} \cdot \left(-6 + 1004 \cdot (-4)\right)$

$= \frac{1005}{2} \cdot \left(-6 - 4016\right)$

$= \frac{1005}{2} \cdot \left(-4022\right) = -1005 \cdot 2011$

Sehingga:

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - ... - x_1 \ \ 2010^2 + 2011^2 = -1005 \cdot 2011 + 2011 \cdot 2011$

$= 2011 \cdot (2011 - 1005)$

$= 2011 \times 1006$

$= 2023066$

Jadi, nilai dari: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - ... - 2010^2 + 2011^2 = 2023066$

8. Jika nilai $100B = 100^2 + 99^2 - 98^2 - 97^2 + 96^2 + 95^2 - 94^2 - 93^2 + \ldots + 4^2 + 3^2 - 2^2 - 1^2$, maka nilai B adalah ...

Jawab:

$100B = 100^2 + 99^2 - 98^2 - 97^2 + 96^2 + 95^2 - 94^2 - 93^2 + \ldots + 4^2 + 3^2 - 2^2 - 1^2$

$100B = (100^2 - 98^2) + (99^2 - 97^2) + (96^2 - 94^2) + (95^2 - 93^2) + \ldots + (4^2 - 2^2) + (3^2 - 1^2)$

$100B = (100 - 98) \cdot (100 + 98) + (99 - 97) \cdot (99 + 97) + (96 - 94) \cdot (96 + 94) + (95 - 93) \cdot (95 + 93) + \ldots + (4 - 2) \cdot (4 + 2) + (3 - 1) \cdot (3 + 1)$

$100B = 2 \cdot 198 + 2 \cdot 196 + 2 \cdot 190 + 2 \cdot 188 + \ldots + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 4$

$100B = 2 \cdot (198 + 196 + 190 + 188 + \ldots + 6 + 4)$

$$\frac{100B}{2} = (198 + 196 + 190 + 188 + \ldots + 6 + 4)$$

$50B = 198 + 196 + 190 + 188 + \ldots + 6 + 4 \quad \rightarrow \quad$ 50 suku

Selanjutnya gunakan trik gauss:

$$\begin{aligned} 50B &= 198 + 196 + 190 + 188 + \ldots + 6 + 4 \\ 50B &= 4 + 6 + 12 + 14 + \ldots + 196 + 198 \quad + \text{(dibalik urutannya)} \\ \hline 100B &= 202 + 202 + 202 + 202 + \ldots + 202 + 202 \\ 100B &= 50 \cdot 202 \\ B &= \frac{50 \cdot 202}{100} = 101 \end{aligned}$$

Jadi, nilai B adalah 101.

9. Jika $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots = a$, maka $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots = \ldots$

Jawab:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots = a$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} \ldots = a$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots = a - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{36} - \ldots$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots = a - 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \ldots \right)$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots = a - 1 - \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots \right)$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots = a - 1 - \frac{1}{4} \cdot a$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots = \frac{3}{4} a - 1$$

Jadi, $\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots=\frac{3}{4}a-1$

10. Jika x adalah jumlah 99 bilangan ganjil terkecil yang lebih besar dari 2011 dan y adalah jumlah 99 bilangan genap terkecil yang lebih besar dari 6, maka $x + y = \ldots$

Jawab:

$$
\begin{array}{rl}
x & = 2013 + 2015 + 2017 + \ldots \\
y & = \quad 8 \quad + \quad 10 \quad + \quad 12 \quad + \ldots \quad + \\
\hline
x + y & = 2021 + 2025 + 2029 + \ldots
\end{array}
$$

Merupakan deret aritmatika dengan:

$a = 2021$

$b = 2025 – 2021 = 4$

$n = 99$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}\cdot\left(2a+\left(n-1\right)\cdot b\right) \\
&= \frac{99}{2}\cdot\left(2\cdot 2021+\left(99-1\right)\cdot 4\right) \\
&= \frac{99}{2}\cdot\left(4042+98\cdot 4\right) \\
&= \frac{99}{2}\cdot\left(4042+392\right) \\
&= \frac{99}{2}\cdot 4434 = 219483
\end{aligned}
$$

Jadi, $x + y = 219483$.

STATISTIKA

Statistik adalah suatu ilmu yang mempelajari tentang cara mengumpulkan, mengolah, menjelaskan, meringkas, menyajikan, dan menginterpretasi data yang digunakan sebagai dasar pengambilan keputusan.

a. Rataan Aritmetik (*Arithmetic Mean*)

Untuk data tunggal

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Metode Singkat:

$$\bar{x} = A + \frac{\sum d}{n}$$

A = rataan sementara atau sebarang nilai x
d = selisih tiap nilai dengan rataan sementara

Contoh

Diberikan nilai data tinggi badan dari 8 siswa SMP Tunasbangsa yaitu 155, 150, 152, 152, 157, 161, 154, 156. Hitunglah rata-rata tinggi mereka.

Jawab:

Dengan cara biasa:

$$\bar{x} = \frac{155+150+152+152+157+161+154+156}{8} = \frac{1237}{8} = 154{,}625$$

Dengan metode singkat:

Anggap 150 adalah rataan sementara.

Selisih tiap nilai dengan rataan sementara:

155 – 150 = 5

150 – 150 = 0

152 – 150 = 2, dan seterusnya

Sehingga diperoleh:

$$\bar{x} = 150 + \frac{5+0+2+2+7+11+4+6}{8} = 150 + \frac{37}{8} = 150 + 4{,}625 = 154{,}625$$

b. Median (Nilai tengah)

$$Md = data\ ke\text{-}\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \text{untuk data ganjil}$$

$$Md = \frac{data\ ke\text{-}\left(\frac{n}{2}\right) + data\ ke\text{-}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2} \quad \rightarrow \quad \text{untuk data genap}$$

*untuk menentukan median, kamu harus mengurutkan data terlebih dahulu.

Contoh

Misalkan ada bilangan 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 (banyak data ganjil), maka nilai tengahnya adalah 40.

Andaikan banyak data genap misal 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85. Oleh karena tidak ada data yang berada tepat di tengah, maka kita tentukan dengan menjumlah data keempat dan kelima kemudian dibagi dua, yaitu:

$$\frac{45+55}{2} = 50$$

Jadi, nilai tengah dari data 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85 adalah 50.

c. Modus (*Mode*)

Modus menunjukkan nilai dalam sebaran data yang paling sering muncul.

Contoh

Diketahui data nilai ulangan matematika yaitu 7, 5, 8, 8, 6, 7, 8, 5, 9, 9, 6, 8, 7, 7, 9, 6, 9, 5, 8, 6, 7, 8, 10. Tentukan modus dari dari tersebut.

Jawab:

5	$\rightarrow$	ada 2	8	$\rightarrow$	ada 6
6	$\rightarrow$	ada 4	9	$\rightarrow$	ada 4
7	$\rightarrow$	ada 5	10	$\rightarrow$	ada 1

Oleh karena nilai 8 yang paling banyak, maka modusnya adalah 8.

Soal dan Pembahasan

1. Perhatikan tabel di samping ini. Sebagai hasil RUPS suatu perusahaan, memutuskan kenaikan gaji dengan aturan sebagai berikut. Gaji buruh kurang atau samdengan Rp 2.000.000,00 diberi kenaikan gaji sebesar 12% dan gaji buruh lebih dari Rp 2.000.000,00 mendapat 8% kenaikan gaji. Berapakah rata-rata gaji buruh setelah mengalami kenaikan gaji?

Nama Karyawan	Besar gaji (dalam ratus ribu rupiah)
A	25
B	18
C	22
D	20
E	17
F	19
G	22
H	22,5

Jawab:

Nama Karyawan	Besar gaji (dalam ratus ribu rupiah)	Gaji sebenarnya
A	25	2.500.000
B	18	1.800.000
C	22	2.200.000
D	20	2.000.000
E	17	1.700.000
F	19	1.900.000
G	22	2.200.000
H	22,5	2.250.000

Untuk menghitung rataan gaji karyawan tersebut, marilah kita bagi menjadi 2 grup yaitu rataan gaji karyawan yang kurang atau samadengan Rp 2.000.000,00 dan rataan gaji karyawan yang lebih dari Rp 2.000.000,00. Sehingga:

Rataan gaji ≤ Rp 2.000.000,00

$$\frac{1.800.000 + 1.700.000 + 1.900.000}{3} = \frac{5.400.000}{3} = 1.800.000$$

Rataan gaji ≤ Rp 2.000.000,00 setelah mengalami kenaikan 12%

$\Leftrightarrow 1.800.000 \times 100\% + 1.800.000 \times 12\%$

$\Leftrightarrow 1.800.000 \times (100\% + 12\%)$

$\Leftrightarrow 1.800.000 \times 112\% = 1.800.000 \times \frac{112}{100} = 18.000 \times 112 = 2.016.000$

Rataan gaji > Rp 2.000.000,00

$\Leftrightarrow \frac{2.500.000 + 2 \times 2.200.000 + 2.000.000 + 2.250.000}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{11.150.000}{5} = 2.230.000$

Rataan gaji > Rp 2.000.000,00 setelah mengalami kenaikan 8%

$\Leftrightarrow 2.230.000 \times 108\% = 2.230.000 \times \frac{108}{100} = 22.300 \times 108 = 2.408.400$

Sehingga, rataan gaji seluruh karyawan setelah mengalami kenaikan gaji adalah:

$\frac{2.016.000 + 2.408.400}{2} = \frac{4.424.400}{2} = 2.212.200$

Jadi, rata-rata setelah mengalami kenaikan gaji adalah Rp 2.212.200.

2. Nilai ujian mata pelajaran diberikan dalam tabel berikut.

Nilai	3	6	7	8	9
Frekuensi	3	5	4	6	2

Seorang siswa dinyatakan lulus jika nilai ujian siswa tersebut di atas rata-rata.

Tentukanlah.

a. Persentase siswa yang lulus dan tidak lulus ujian mata pelajaran tersebut.

b. Modus dan median data di atas.

Jawab:

Nilai	3	6	7	8	9	Jumlah
Frekuensi	3	5	4	6	2	20
Nilai × Frekuensi	9	30	28	48	18	133

Banyak data = 20

Jumlah semua nilai data = 133

Sehingga:

$$\bar{x} = \frac{133}{20} = 6,65$$

Seorang siswa dinyatakan lulus jika nilai ujian di atas 6,65. (Nilai > 6,65)

Nilai	3	6	7	8	9
Frekuensi	3	5	4	6	2

Dapat dilihat bahwa siswa yang dapat dinyatakan lulus ujian ada sebanyak 12 siswa.

a. Persentase siswa yang lulus dan tidak lulus ujian mata pelajaran tersebut.

$$\frac{12}{20} \times 100\% = 12 \times 5\% = 60\%$$

Prosentase siswa yang lulus ujian adalah 60%.

Prosentase siswa yang tidak lulus ujian adalah 100% – 60% = 40%

b. Modus dan median data di atas.

- Modus data di atas adalah 8. Mengapa?
- Median data di atas adalah:

$$\text{Me} = \frac{data\ ke\text{-}\left(\frac{n}{2}\right) + data\ ke\text{-}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}$$

$$= \frac{data\ ke\text{-}\left(\frac{20}{2}\right) + data\ ke\text{-}\left(\frac{20}{2}+1\right)}{2}$$

$$= \frac{data\ ke\text{-}\ 10 + data\ ke\text{-}\ 11}{2}$$

$$= \frac{7+7}{2} = \frac{14}{2} = 7$$ → mediannya adalah 7

Perhatikan tabel berikut. Data pada tabel sudah terurut.

Nilai	3	6	7	8	9
Frekuensi	3	5	4	6	2
Frekuensi komulatif	3	8	12	18	20
Data ke-	1 – 3	4 – 8	9 – 12	13 – 18	19 – 20

3. Diketahui data dengan pola sebagai berikut.

   $(x + 2)$, $(2x – 1)$, x, $3x$, $5x$ memiliki rata-rata 7. Tentukanlah nilai x, modus, dan median data tersebut!

   Jawab:

   $(x + 2)$, $(2x – 1)$, x, $3x$, $5x$ → ada sebanyak 5 data

   $$\frac{(x+2)+(2x-1)+x+3x+5x}{5} = 7$$

   $(x + 2) + (2x – 1) + x + 3x + 5x = 35$

   $x + 2 + 2x – 1 + x + 3x + 5x = 35$

   $12x + 1 = 35$

   $12x = 35 – 1$

   $12x = 34$

   $x = \frac{34}{12} = \frac{17}{6}$ → nilai $x = \frac{17}{6}$

substitusi $x = \frac{17}{6}$ ke setiap nilai data.

$x + 2 = \frac{17}{6} + 2 = \frac{17}{6} + \frac{12}{6} = \frac{29}{6}$

$2x - 1 = 2 \cdot \frac{17}{6} - 1 = \frac{34}{6} + \frac{6}{6} = \frac{28}{6}$

$x = \frac{17}{6}$

$3x = 3 \cdot \frac{17}{6} = \frac{51}{6}$

$3x = 5 \cdot \frac{17}{6} = \frac{85}{6}$

$(x + 2)$, $(2x - 1)$, x, $3x$, $5x$ kita tulis kembali menjadi $\frac{29}{6}$, $\frac{28}{6}$, $\frac{17}{6}$, $\frac{51}{6}$, dan $\frac{85}{6}$.

- Tidak ada modus dalam data tersebut
- Median (urutkan data terlebih dahulu)

  $\frac{17}{6}, \frac{28}{6}, \frac{29}{6}, \frac{51}{6}, \frac{85}{6}$

  Karena banyak data ganjil maka median terletak di tengah pada data ketiga yaitu $\frac{29}{6}$.

4. Misalkan data tertinggi suatu data disimbolkan x_{maks} dan data terendah suatu data disimbolkan x_{min}, diketahui bahwa $x_{maks} - x_{min} = 6$, dan rata-rata data tersebut adalah 16. Jika setiap nilai data dikali n kemudian ditambah $2m$, diperoleh data baru dengan $x_{maks} - x_{min} = 9$, dan rata-rata menjadi 30. Tentukanlah nilai $m + n$!

   Jawab:

   Misal data-datanya adalah:

a, b, dan c dengan a, b, dan c merupakan bilangan asli.

$a < b < c$

Sehingga:

$c - a = 6$

$\frac{a+b+c}{3} = 16 \quad \rightarrow \quad a + b + c = 48$

Setiap nilai data dikali n kemudian ditambah $2m$ sehingga datanya menjadi

$(na + 2m), (nb + 2m), (nc + 2m) \quad \rightarrow \quad (na + 2m) < (nb + 2m) < (nc + 2m)$

Maka:

$(nc + 2m) - (na + 2m) = 9$

$nc + 2m - na - 2m = 9$

$nc - na = 9$

$n \cdot (c - a) = 9$

$n \cdot 6 = 9$

$6n = 9$

$n = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$\frac{(na+2m)+(nb+2m)+(nc+2m)}{3} = 30$

$(na + 2m) + (nb + 2m) + (nc + 2m) = 90$

$na + 2m + nb + 2m + nc + 2m = 90$

$na + nb + nc + 6m = 90$

$n \cdot (a + b + c) + 6m = 90$

$\frac{3}{2} \cdot (48) + 6m = 90$

$72 + 6m = 90$

$6m = 90 - 72$

$6m = 18$

$m = \frac{18}{6} = 3$

$m + n = 3 + \frac{3}{2}$

$= \frac{6}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

Jadi, $m + n = \frac{9}{2}$.

5. Rataan usia kelompok guru dan profesor adalah 40 tahun. Jika rataan kelompok guru adalah 35 tahun sedangkan rataan kelompok profesor adalah 50 tahun, perbandingan banyaknya guru dengan profesor adalah ...

Jawab:

$\bar{x}_{gabungan} = 40$; $\bar{x}_{guru} = 35$; $\bar{x}_{profesor} = 50$

$$\bar{x}_{gabungan} = \frac{n_g \cdot \bar{x}_{guru} + n_p \cdot \bar{x}_{profesor}}{n_g + n_p}$$

$$40 = \frac{n_g \cdot 35 + n_p \cdot 50}{n_g + n_p}$$

$40 (n_g + n_p) = 35n_g + 50n_p$

$40n_g + 40n_p = 35n_g + 50n_p$

$40n_g - 35n_g = 50n_p - 40n_p$

$5n_g = 10n_p$

$\frac{n_g}{n_p} = \frac{10}{5}$

$\frac{n_g}{n_p} = \frac{2}{1}$

$n_g : n_p = 2 : 1$

Jadi, perbandingan banyaknya guru dengan profesor adalah 2 : 1.

BAB

2

TEORI BILANGAN

NUMBER THEORY

SUBBAB

- Sifat Penjumlahan dan Perkalian
- FPB dan KPK
- Pembagian Bersisa
- Kongruen

Albert Einstein

Filsafat itu kosong jika berdasarkan ilmu pengetahuan. Ilmu pengetahuan itu menemukan dan filsafat itu menafsirkan.

SIFAT PENJUMLAHAN DAN PERKALIAN

Aturan perkalian tanda:

1. Positif $\times$ Positif = Positif
2. Positif $\times$ Negatif = Positif
3. Negatif $\times$ Positif = Positif
4. Negatif $\times$ Negatif= Positif

Aturan penjumlahan dua bilangan:

1. Bilangan Genap $\pm$ Bilangan Genap = Bilangan Genap
2. Bilangan Genap $\pm$ Bilangan Ganjil = Bilangan Ganjil
3. Bilangan Ganjil $\pm$ Bilangan Genap = Bilangan Ganjil
4. Bilangan Ganjil $\pm$ Bilangan Ganjil = Bilangan Genap

Aturan perkalian dua bilangan:

1. Bilangan Genap $\times$ Bilangan Genap = Bilangan Genap
2. Bilangan Genap $\times$ Bilangan Ganjil = Bilangan Ganjil
3. Bilangan Ganjil $\times$ Bilangan Genap = Bilangan Ganjil
4. Bilangan Ganjil $\times$ Bilangan Ganjil = Bilangan Ganjil

Contoh

1. Coba periksa kebenaran hasil operasi di bawah ini:

   a. $26 + 10 \times 1993 = 19956$

   b. $123 + (-321) \times 2 \times 1 : 3 + 132 \times 1 \times 2 : 3 = -3$

   c. $(1 + 2 \times 3 : \sqrt{3^4})^2 = 1$

   d. $(4 + 4)^2 = 32$

   e. $2(3 - 5)^3 = -16$

2. Hasil kali suatu bilangan genap dan suatu bilangan ganjil adalah 840. Bilangan ganjil yang terbesar yang memenuhi syarat tersebut adalah ...

Jawab:

$840 = 2 \times 420$

$= 2 \times 2 \times 210$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 105$

$= 2^3 \times 105$

Temukan faktor dari 840:

Misal x dan y merupakan faktor dari 840. Perhatikan tabel berikut.

x	y	Genap $\times$ Ganjil	x	y	Ganjil $\times$ Genap
840	1	Memenuhi	105	8	Memenuhi
420	2	-	84	10	-
280	3	Memenuhi	70	12	-
210	4	-	60	14	-
168	5	Memenuhi	40	21	Memenuhi
140	6	-	42	20	-
120	7	Memenuhi	28	30	-

Dapat dilihat bahwa 105 merupakan faktor bilangan ganjil terbesar dari 840.

Jadi, bilangan ganjil yang terbesar yang memenuhi syarat tersebut adalah 105.

FPB DAN KPK

Pengertian FPB

Misalkan a, $b \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ adalah notasi dari bilangan bulat). Suatu bilangan bulat d disebut faktor persekutuan terbesar (*greatest common divisor*/*gcd*) dari a dan b jika:

a. d membagi habis a dan b, jadi $d|a$ dan $d|b$.

b. untuk setiap bilangan e pembagi habis a dan b, maka $e|d$.

faktor persekutuan terbesar d dari bilangan a dan b dinotasikan dengan:

$$gcd(a, b) = d \text{ atau } \mathbf{FPB}(a, b) = d$$

Pengertian Relatif Prima (*Relative Prime*)

Dua buah bilangan bulat a dan b disebut saling prima (*relative prime*) jika $gcd(a, b) = 1$.

Sifat:

Jika a dan b dua buah bilangan bulat dan $d = gcd(a, b)$, maka terdapat bilangan bulat m dan n sehingga $d = ma + nc$.

Contoh soal

Faktorisasi prima dari 5220 adalah ...

Jawab:

$$\begin{aligned} 5220 &= 2 \times 2610 \\ &= 2 \times 2 \times 1305 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 435 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 145 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 29 \\ &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 29 \end{aligned}$$

Jadi, faktorisasi prima dari 5220 adalah $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 29$.

Sifat pemfaktoran tunggal:

Setiap bilangan bulat a dengan $|a| > 1$, maka a dapat ditulis sebagai perkalian bilangan prima. Penulisan ini tunggal kecuali urutannya.

Contoh

$7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$. Pemfaktoran bilangan prima ini dapat dicari dengan menggunakan pohon faktor seperti yang dipelajari di bangku sekolah dasar.

Pengertian KPK

Suatu bilangan positif *d* disebut kelipatan persekutuan terkecil (*least common multiple*/*lcm*)bilangan *a* dan *b* jika:

a. *d* kelipatan *a* dan *b*, jadi $a|d$ dan $b|d$.

b. untuk setiap bilangan *e* kelipatan dari *a* dan *b*, maka $d|e$.

Kelipatan persekutuan terkecil *d* dari bilangan *a* dan *b* dinotasikan dengan **KPK**$(a, b) = d$

Contoh

Kelipatan persekutuan terkecil dari 210, 42, dan 70 adalah ...

Jawab:

$210 = 2 \times 105 = 2 \times 3 \times 35 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

$42 = 2 \times 21 = 2 \times 3 \times 7$

$70 = 2 \times 35 = 2 \times 5 \times 7$

KPK dari 210, 42, dan 70 adalah $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$.

PEMBAGIAN BERSISA

Jika $a \neq 0$, b merupakan bilangan bulat, kita katakan bahwa a membagi b jika ada bilangan bulat c sedemikian sehingga $ac = b$. ditulis dengan $a|b$.

Misalkan a, b bilangan bulat, $b > 0$. Ada bilangan bulat unik q dan r sehingga

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

Penjelasan:

a disebut yang dibagi (*dividend*)

b disebut pembagi (*divisor*)

q disebut hasil bagi (*quotient*)

r disebut sisa (*remainder*)

Contoh

1. Tentukan hasil pembagian 1987 oleh 97.

   Jawab:

   1987 jika dibagi 97 memberikan hasil bagi 20 dan sisa 47. Jadi, kita dapat menuliskan bahwa:

   $$1987 = 97 \cdot 20 + 47$$

2. Tentukan hasil pembagian –22 oleh 3.

   Jawab:

   1987 jika dibagi 97 memberikan hasil bagi 20 dan sisa 47. Jadi, kita dapat menuliskan bahwa:

   $$-22 = 3 \cdot (-8) + 2$$

   Ingatlah bahwa sisa pembagian tidak boleh negatif, jadi kita tidak dapat menuliskan:

   $$-22 = 3 \cdot (-8) + 2$$

   Karena $r = -1$ tidak memenuhi syarat $0 \leq r < b$

Sebaliknya, jika 24 dibagi dengan 3, maka kita dapat menuliskan:

$$24 = 3 \cdot 8 + 0$$

Karena $r = 0$ memenuhi syarat $0 \leq r < b$

Sifat-sifat pada himpunan bilangan bulat berlaku:

a. Sifat refleksif

   Untuk setiap bilangan bulat a berlaku $a|a$

b. Sifat transitif

   Untuk setiap bilangan bulat a, b, dan c berlaku jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$

c. Sifat linear

   Untuk setiap bilangan bulat a, b, c, x dan y berlaku jika $a|b$ dan $a|c$ maka $a|(xb + yc)$

d. Sifat perkalian

   Untuk setiap bilangan bulat a, b, dan c berlaku jika $a|b$ maka $ca|cb$

e. Sifat bilangan 1

   Untuk setiap bilangan bulat a berlaku jika $a|1$

f. Sifat bilangan 0

   Untuk setiap bilangan bulat a berlaku jika $a|0$

g. Jika $b|a$ dan $a|b$ maka $a = \pm b$, bilangan a dan b saling berkaitan.

Ciri-ciri bilangan yang habis dibagi *n*:

Habis dibagi	Ciri-ciri
2	Digit terakhirnya genap
3	Jumlah digitnya habis dibagi 3
4	Dua digit terakhirnya habis dibagi 4
5	Digit terakhirnya 0 atau 5
8	Tiga digit terakhirnya habis dibagi 8
9	Jumlah digitnya habis dibagi 9
11	Selisih digit-digit pada tempat ganjil dan tempat gasal adalah nol

KONGRUEN

Misalkan a, b bilangan bulat dan m suatu bilangan bulat positif. Kita katakan a kongruen dengan b modulo m jika m membagi $a - b$. ditulis dengan $a \equiv b$ mod m. Jika m tidak membagi $a - b$, maka kita tulis $a \not\equiv b$ mod m. Hubungan $a \equiv b$ untuk bilangan bulat a dan b mempunyai banyak himpunan yang sama dengan hubungan $a \equiv b$.

Sifat. Untuk bilangan bulat a, b, c dan bilangan bulat positif m berlaku:

1. $a \equiv b$ mod m;
2. Jika $a \equiv b$ mod m, maka $b \equiv a$ mod m;
3. Jika $a \equiv b$ mod m dan $b \equiv c$ mod m, maka $a \equiv c$ mod m;
4. Jika $a_i \equiv b_i$ mod m untuk $1 \leq i \leq n$, maka $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ mod m;
5. Jika $a + b \equiv c$ mod m, maka $a \equiv c - b$ mod m;
6. Jika $a \equiv b$ mod m, maka $a + c \equiv b + c$ mod m;
7. Jika $a_i \equiv b_i$ mod m , maka $a_1 a_2 \ldots a_n \equiv b_1 b_2 \ldots b_n$ mod m;
8. Jika $a \equiv b$ mod m, maka $ac \equiv bc$ mod m;
9. Jika $a \equiv b$ mod m, maka $a^n \equiv b^n$ mod m;
10. Jika $a \equiv b$ mod m dan $f(x)$ adalah suku banyak dengan koefisien bilangan bulat, maka $f(a) \equiv f(b)$ mod m;

Contoh

Jika 2^{13} dibagi dengan 13, maka akan memberikan sisa samadengan ...

Jawab:

$2^{13} = 8192 \equiv 2 \pmod{13}$

Jadi, 2^{13} dibagi dengan 13 memberikan sisa 2.

Soal dan Pembahasan

1. Jika bilangan bulat x dan y dibagi 4, maka bersisa 3. Jika bilangan $x - 3y$ dibagi 4, maka bersisa ...

   Jawab:

   $x = 4a + 3 \quad \rightarrow \quad$ untuk $a \in$ bilangan bulat

   $y = 4b + 3 \quad \rightarrow \quad$ untuk $b \in$ bilangan bulat

   $3y = 3 \cdot (4b + 3)$

   $= 4 \cdot (3b) + 9$

   $= 4b' + 1 \quad \rightarrow \quad$ untuk $b' \in$ bilangan bulat

   Sehingga:

   $x - 3y = 3 \cdot (4b + 3) - (4b' + 1)$

   $= 4a + 3 - 4b' - 1$

   $= 4 \cdot (a - b') + 2$

   Jadi, $x - 3y$ dibagi 4 bersisa 2.

2. Bilangan 43 dapat dinyatakan ke dalam bentuk $5a + 11b$ karena untuk $a = 13$ dan $b = -2$, nilai dari $5a + 11b$ adalah 43. Manakah dari tiga bilangan 37, 254, dan 1986 yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $5a + 11b$.

   Jawab:

   Perhatikan bahwa 1 dapat dinyatakan dalam bentuk $5a + 11b$ dengan $a = -2$ dan $b = 1$. Karena 1 membagi semua bilangan bulat, maka semua bilangan dapat dinyatakan ke dalam bentuk $5a + 11b$.

   Periksa:

   $37 = 5a + 11b$ (untuk $a = 3$ dan $b = 2$)

   $37 = 5(3) + 11(2)$

   $37 = 15 + 22$

   $37 = 37$ (benar)

   $254 = 5a + 11b$ (untuk $a = 53$ dan $b = -1$)

254 = 5(53) + 11(–1)

254 = 265 + –11

254 = 254 (benar)

1986 = 5*a* + 11*b* (untuk *a* = 395 dan *b* = 1)

1986 = 5(395) + 11(1)

1986   975 + 11

1986 = 1986 (benar)

Berarti tidak ada yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk tersebut.

Jadi, 37, 254, dan 1986 dapat dinyatakan dalam bentuk 5*a* + 11*b*.

3. Diketahui bilangan bulat positif *n* memiliki sifat-sifat berikut. 2 membagi *n*, 3 membagi *n* + 1, 4 membagi *n* + 2, 5 membagi *n* + 3, 6 membagi *n* + 4, 7 membagi *n* + 5, dan 8 membagi *n* + 6. Bilangan bulat positif pertama yang memiliki sifat-sifat ini adalah 2. Tentukan bilangan bulat positif ke-5 yang memenuhi sifat-sifat di atas!

Jawab:

Diketahui	Misalkan	Diperoleh
2 membagi n		2 membagi $(k + 2)$
3 membagi $n + 1$		3 membagi $(k + 2) + 1 = k + 3$
4 membagi $n + 2$		4 membagi $(k + 2) + 2 = k + 4$
5 membagi $n + 3$	$n = k + 2$	5 membagi $(k + 2) + 3 = k + 5$
6 membagi $n + 4$		6 membagi $(k + 2) + 4 = k + 6$
7 membagi $n + 5$		7 membagi $(k + 2) + 5 = k + 7$
8 membagi $n + 6$		8 membagi $(k + 2) + 6 = k + 8$

Dengan demikian, pembagian ditentukan oleh nilai *k*.

di mana: *k* = KPK dari 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 = 840.

Sehingga:

$n_1 = 0 \cdot k + 2 = 0 \cdot 840 + 2 = 2$

$n_2 = 1 \cdot k + 2 = 1 \cdot 840 + 2 = 840 + 2 = 842$

$n_3 = 2 \cdot k + 2 = 2 \cdot 840 + 2 = 1680 + 2 = 1682$

$n_4 = 3 \cdot k + 2 = 3 \cdot 840 + 2 = 2520 + 2 = 2522$

$n_5 = 4 \cdot k + 2 = 4 \cdot 840 + 2 = 3360 + 2 = 3362$

Jadi, bilangan bulat positif ke-5 yang memenuhi adalah 3362.

4. Periksa kekongruenan berikut:

   a. $2^{70} + 3^{70} \equiv 0 \bmod 13$.

   b. $3^{2009} \equiv 3 \bmod 10$

   c. $(207 - 41)^{10} \equiv 24 \bmod 100$

   d. $2^{2^5} \equiv -1 \bmod 641$

   Jawab:

   a. Kita peroleh $2^6 \equiv -1 \bmod 13$. Sehingga $2^{70} \equiv 2^4 \cdot (2^6)^{11} \equiv -2^4 \equiv 10 \bmod 13$. Kita peroleh$\equiv$ $3^3 \equiv 1 \bmod 13$. Sehingga $3^{70} \equiv 3 \cdot (3^3)1^{23} \equiv 3 \bmod 13$. Dengan demikian $2^{70} + 3^{70} \equiv 10 + 3 \equiv 0 \bmod 13$.

   b. Kita peroleh $3^4 = 81 \equiv 1 \bmod 10$. Sehingga $3^{2009} \equiv 3 \cdot (3^4)^{502} \equiv 3 \cdot 1^{502} \equiv 3 \bmod 10$.

   c. Kita peroleh $7^4 = 2401 \equiv 1 \bmod 100$. Sehingga $207^{19} \equiv 7^{19} \equiv 7^3 \cdot (7^4)^4 \equiv 7^3 \cdot 1^4 = 343 \equiv 43 \bmod 100$. Sehingga $207^{19} - 41 \equiv 2 \bmod 100$, maka $(207 - 41)^{10} \equiv 2^{10} = 1024 \equiv 24 \bmod 100$.

   d. Kita peroleh $641 = 5 \cdot 2^7 + 1 = 5^4 + 2^4$. Sehingga $5 \cdot 2^7 \equiv -1 \bmod 641$ dan $5^4 \equiv -(2^4) \bmod 641$. Maka kita peroleh $2^{2^5} = 2^{32} = 2^4 \cdot (2^7)^4 \equiv -(5^4)(2^7)^4 \equiv (-1)^5 = -1 \bmod 641$.

5. Tentukan angka satuan dari:

   a. $9^{1003} - 7^{902} + 3^{801}$.
   b. $223^{12} - 44^{15}$.

   Jawab:

   a. Kita peroleh $223^{12} \equiv 3^{12} \equiv (3^4)^4 \equiv 1^3 \equiv 1 \bmod 10$. Dengan cara yang sama, $44^{15} \equiv 4^{15} \equiv 4^3 \equiv 4 \bmod 10$. Sehingga $223^{12} - 44^{15} \equiv 1 - 4 \equiv 7 \bmod 10$. Jadi, angka satuannya adalah 7.

b. Kita peroleh $9^{1003} \equiv (-1)^{1003} \equiv -1 \equiv 9$ mod 10. Dengan penjumlahan, $7^{902} \equiv 49^{451} \equiv (-1)^{451} \equiv -1$ mod 10. Terakhir, $3^{801} \equiv 3 \cdot (3^4)^{200} \equiv 3 \cdot 1^{200} \equiv 3$ mod 10. Sehingga $9^{1003} - 7^{902} + 3^{801} \equiv (-1) - (-1) + 3 \equiv 3$ mod 10. Jadi, angka satuannya adalah 3.

6. Temukan tiga digit terakhir dari $2003^{2002^{2001}}$.

Jawab:

Kita harus temukan sisa bagi $2003^{2002^{2001}}$ oleh 1000, akan disamakan sisa bagi $2003^{2002^{2001}}$ oleh 1000, karena $2003 \equiv 3 \pmod{1000}$. Untuk mengerjakan ini kita akan temukan dahulu suatu bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $3^n \equiv 1 \pmod{1000}$ dan coba ekpresikan 2002^{2001} ke dalam bentuk $nk + r$, sehingga

$$2003^{2002^{2001}} \equiv 3^{nk+r} \equiv (3^n)^k \cdot 3r \equiv 1^k \cdot 3^r \equiv 3^r \pmod{1000}$$

Sepanjang $3^2 = 10 - 1$, kita dapat menghitung 3^{2m} dengan teorema binomial:

$$3^{2m} = (10-1)^m = (-1)^m + 10m(-1)^{m-1} + 100\frac{m(m-1)}{2}(-1)^{m-2} + \ldots + 10^m,$$

Setelah tiga bentuk pertama dari ekspansi ini, semua sisanya habis dibagi 1000. Jadi, misalkan $m = 2q$, kita peroleh bahwa

$$3^{4q} \equiv 1 - 20q + 100q(2q-1) \pmod{1000}. \qquad (1)$$

Dengan ini, kita dapat periksa bahwa $3^{100} \equiv 1 \pmod{1000}$ dan sekarang kita ingin temukan sisa bagi dari 2002^{2001} oleh 100.

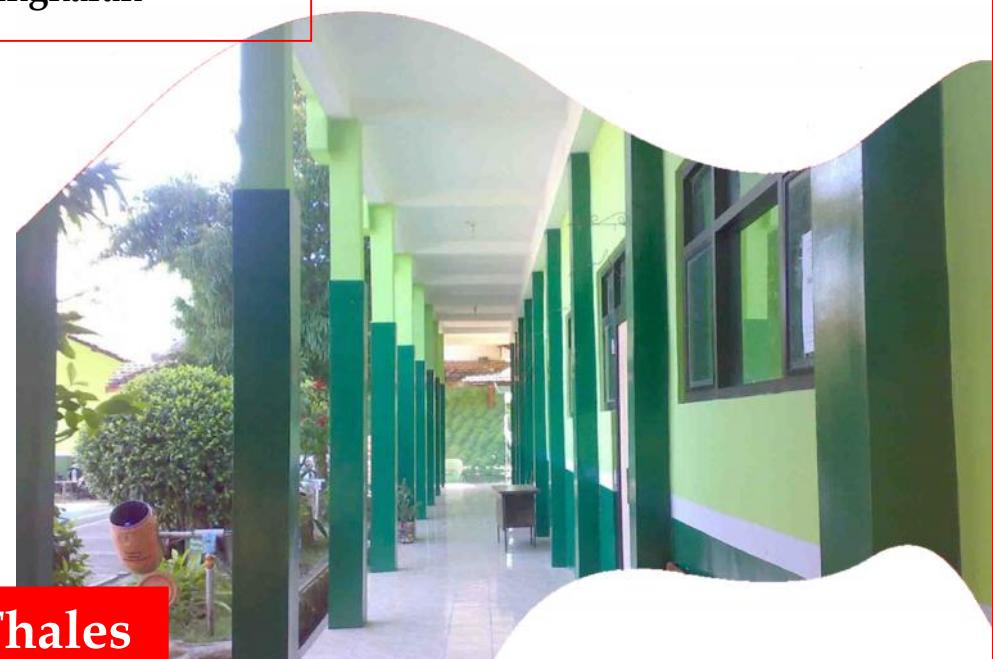
Sekarang $2002^{2001} \equiv 2^{2001} \pmod{100} \equiv 4 \cdot 2^{1999} \pmod{4 \cdot 25}$, jadi kita akan menyelidiki pangkat dari 2 modulo 25. Ingat bahwa $2^{10} = 1024 \equiv -1$ (mod 25), kita peroleh

$$2^{1999} = (2^{10})^{199} \cdot 2^9 \equiv (-1)^{199} \cdot 512 \equiv -12 \equiv 13 \pmod{25}$$

Akibatnya $2^{2001} \equiv 4 \cdot 13 = 52 \pmod{10}$. Dengan demikian 2002^{2001} dapat ditulis menjadi $100k + 52$ untuk bilangan bulat k tertentu, maka

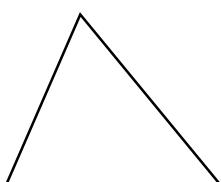
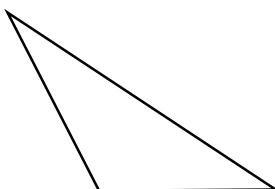
$$2003^{2002^{2001}} \equiv 3^{52} \pmod{1000} \equiv 1 - 20 \cdot 13 + 1300 \cdot 25 \equiv 241 \pmod{1000}$$

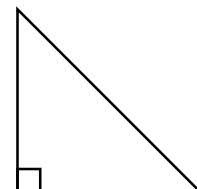
dengan menggunakan persamaan (1). Jadi, tiga digit terakhir dari $2003^{2002^{2001}}$ adalah 241.

BAB 3

GEOMETRI

GEOMETRY

SUBBAB

- **Segitiga**
- **Segiempat**
- **Lingkaran**

Thales

Orang yang bercita-cita tinggi adalah orang yang menganggap teguran keras baginya lebih lembut daripada sanjungan merdu seorang penjilat yang berlebih-lebihan.

SEGITIGA

Segitiga adalah bidang datar yang dibentuk oleh tiga buah garis lurus yang bertemu pada tiga titik sudut serta tidak ada garis yang sejajar.

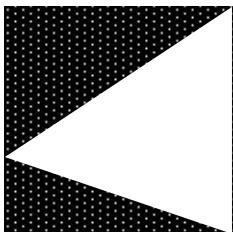
Segitiga lancip | Segitiga tumpul | Segitiga siku-siku

Diberikan sebuah segitiga dengan titik sudut A, B, dan C.

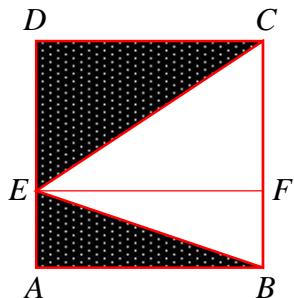
- Garis tinggi adalah garis yang melalui salah satu titik sudut A, B, dan C dan tegak lurus terhadap sisi di hadapan titik sudut tersebut.
- Garis bagi adalah garis yang melalui salah satu titik sudut A, B, dan C dan membagi dua sudut sama besar.
- Garis bagi adalah garis yang melalui salah satu titik sudut A, B, dan C dan membagi dua sisi di hadapan titik sudut sama panjang.

Jika ABC sebuah segitiga yang panjang alas a dan tinggi t, maka luas daerah segitiga dapat dinyatakan dengan:

$$L = \frac{1}{2}(a \times t)$$

Jika ΔABC memiliki panjang sisi a , b dan c, maka keliling segitiga ABC adalah $K = a + b + c$.

Jika ΔABC memiliki panjang sisi a , b dan c, maka keliling segitiga ABC adalah:

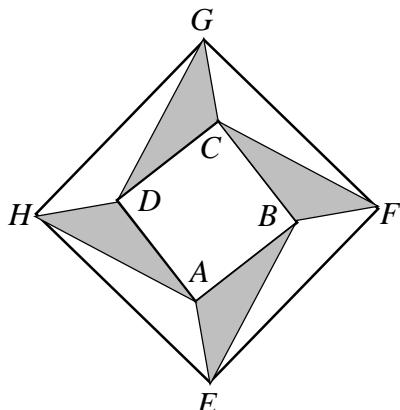
$$L = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \qquad S = \frac{1}{2}K$$

S = panjang setengah keliling

Soal dan Pembahasan

1. Reni mempunyai satu lembar karton bermotif berbentuk persegi dengan panjang sisinya 25 cm. Reni akan membuat mainan yang berbentuk seperti pada gambar di bawah. Berapakah luas karton yang tidak terpakai?

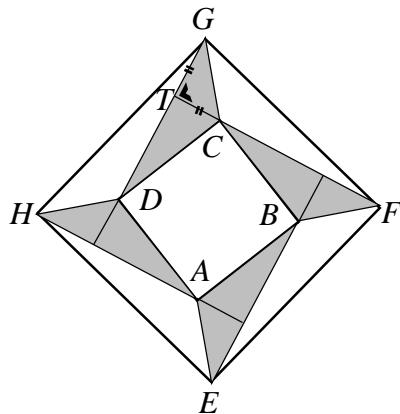
Jawab:

Perhatikan gambar berikut.

Perhatikan persegipanjang *ABFB* dan *EFCD*, *EB* merupakan diagonal persegipanjang *ABFB* yang mengakibatkan daerah arsiran *ABE* samadengan setengah dari persegipanjang *ABFB*. Kemudian, *EC* merupakan diagonal persegipanjang *EFCD* yang mengakibatkan daerah arsiran *EDC* samadengan setengah dari persegipanjang *EFCD*. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa luas arsiran keseluruhan samadengan setengah dari persegi *ABCD*, arti lainnya bahwa luas daerah karton yang terpakai samadengan luas karton yang tidak terpakai Sehingga:

$$\begin{aligned} \text{L. arsiran} &= \frac{1}{2} \times \text{persegi } ABCD \\ &= \frac{1}{2} \times 25^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 625 = 312{,}5 \end{aligned}$$

Jadi, luas karton yang tidak terpakai adalah 312,5 cm^2.

2. Gambar di bawah ini, ΔABE, ΔBDF, ΔCDG, dan ΔADH memiliki bentuk dan ukuran yang sama. Luas persegi $ABCD$ samadengan jumlah luas daerah yang diarsir. Jika luas $ABCD = 2M$, maka tentukan luas $EFGH$.

Jawab:

Diketahui:

$$L_{ABCD} = L_{ABE} + L_{BCF} + L_{CDG} + L_{ADH} = 2M$$

Karena bangun $ABCD$ dan $EFGH$ adalah persegi serta ΔABE, ΔBCF, ΔCDG, dan ΔADH adalah sebangun maka $L_{ABE} = L_{BCF} = L_{CDG} = L_{ADH}$, sehingga:

Misal: $CF = DG = AH = BE = x$

Perhatikan gambar

Karena $L_{ABCD} = L_{ABE} + L_{BCF} + L_{CDG} + L_{ADH}$ akan terpenuhi jika ΔCTG merupakan segitiga siku-siku samakaki, sehingga:

$$L_{CDG} = \tfrac{1}{2} \cdot DG \cdot CT = \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot y$$

$$L_{CFG} = \tfrac{1}{2} \cdot CF \cdot GT = \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot y$$

Ini menunjukkan bahwa:

$$L_{CFG} + L_{DGH} + L_{AEH} + L_{BEF} = L_{ABE} + L_{BCF} + L_{CDG} + L_{ADH} = 2M$$

Anggap:

Luas I = $L_{ABE} + L_{BCF} + L_{CDG} + L_{ADH}$

Luas II = $L_{CFG} + L_{DGH} + L_{AEH} + L_{BEF}$

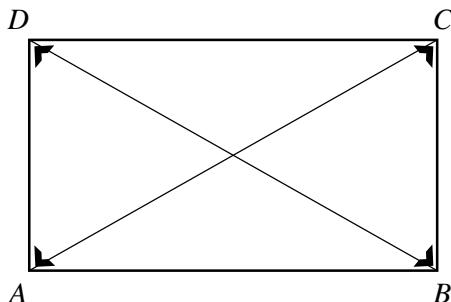
Sehingga:

$$L_{EFGH} = L_{ABCD} + Luas\ I + Luas\ II$$

$$= 2M + 2M + 2M$$

$$= 6M$$

Jadi, luas *EFGH* adalah 6*M*.

Alternatif penyelesaian:

Jika luas persegi *ABCD* samadengan jumlah luas yang diarsir maka berlaku:

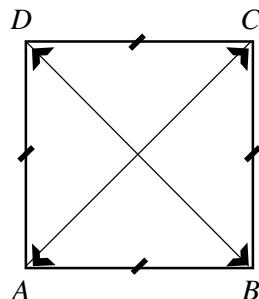
$$L_{EFGH} = 3 \cdot L_{ABCD} = 3 \cdot 2M = 6M$$

SEGIEMPAT

A. PERSEGIPANJANG (*RECTANGLE*)

Persegipanjang adalah segiempat yang memiliki dua pasang sisi sejajar dan sama panjang serta sisi-sisi yang berpotongan membentuk sudut 90°.

Untuk semua persegipanjang berlaku:

- Sisi-sisi yang berhadapan sejajar dan sama panjang. Pada persegipanjang *ABCD*, sisi *AB* dan *CD* sejajar dan sama panjang. Demikian juga sisi *AD* dan *BC* sejajar dan sama panjang.
- Semua sudutnya sama besar dan besar setiap sudutnya 90°. Pada persegipanjang *ABCD*, $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = \measuredangle A = 90°$.
- Memiliki dua diagonal yang sama panjang. Pada persegipanjang *ABCD*, *AC* = *BD*.

Misalkan *ABCD* sebuah persegipanjang dengan *AB* adalah panjang (*p*) dan *BC* adalah lebar (*l*). Luas (*L*) dan Keliling (*K*) persegipanjang dinyatakan dengan:

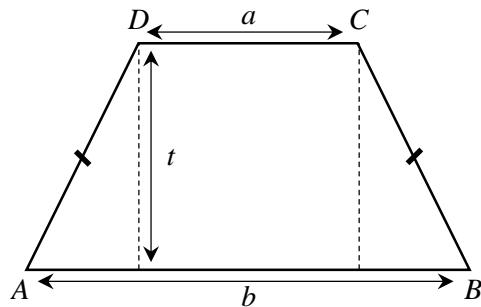
$L = p \times l$

$K = 2(p + l)$ atau $K = 2p + 2l$

B. PERSEGI (SQUARE)

Persegi adalah persegipanjang yang semua sisinya sama panjang

Misalkan *ABCD* sebuah persegi dengan panjang sisinya *s*. Luas (*L*) dan Keliling (*K*) persegi dinyatakan dengan:

$L = s \times s = s^2$

$K = 4s$

Untuk semua persegi berlaku:

- Mempunyai empat sisi yang sama panjang. Pada persegi *ABCD*, panjang sisi *AB* sejajar dengan *CD*, sisi *BC* sejajar dengan *AD*.
- Memiliki dua pasang sisi sejajar dan sama panjang. Pada persegi *ABCD*, sisi *AB* dan *CD* sejajar dan sama panjang. Demikian juga sisi *AD* dan *BC* sejajar dan sama panjang.
- Mempunyai empat sudut siku-siku. Pada persegi *ABCD*, $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = \measuredangle A = 90°$. Karena terdapat empat sudut dan tiap sudut besarnya 90° maka jumlah keempat sudut dalam persegi adalah 360°.
- Memiliki dua diagonal yang sama panjang. Pada persegi *ABCD*, *AC* = *BD*.

C. TRAPEZIUM

Trapezium adalah segiempat yang memiliki tepat satu pasang sisi sejajar.

Sifat-sifat pada trapezium:

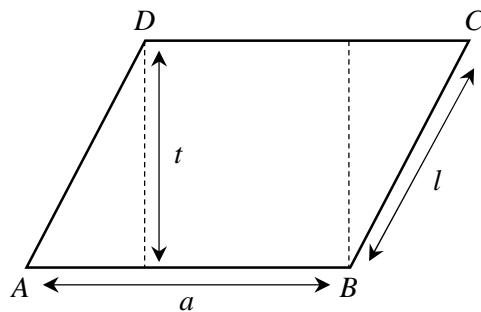
i) Trapezium memiliki tepat satu pasang sisi sejajar.

ii) Jumlah sudut-sudut berdekatan pada garis sejajar suatu trapezium adalah 180°.

Trapezium samakaki memiliki sifat berikut.

1. Memiliki tepat satu pasang sisi sejajar.
2. Memiliki dua diagonal bidang yang sama panjang
3. Sudut-sudut alasnya sama besar.

Trapezium samakaki memiliki sifat berikut.

1. Memiliki tepat satu pasang sisi sejajar.
2. Memiliki dua sudut siku-siku.

Sebuah trapesium *ABCD* samakaki, dengan panjang alas *b*, sisi atas *a*, dan tingginya *t*, luas dan kelilingnya adalah:

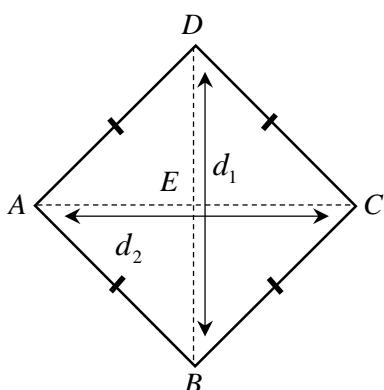
$$L = \frac{(a+b)\times t}{2}$$

$K = AB + BC + CD + DA$

D. JAJARGENJANG

Jajargenjang adalah segiempat yang memiliki dua pasang sisi sejajar dan sudut-sudut yang berhadapan sama besar.

Ciri-ciri jajargenjang antara lain:

1. Memiliki dua pasang sisi sejajar.
2. Jumlah sudut yang berhadapan adalah 180°.
3. Memiliki dua pasang sudut yang sama besar.

Misalkan *ABCD* adalah jajargenjang dengan panjang alas *a*, tinggi *t*, dan *l* adalah panjang sisi yang lain, maka:

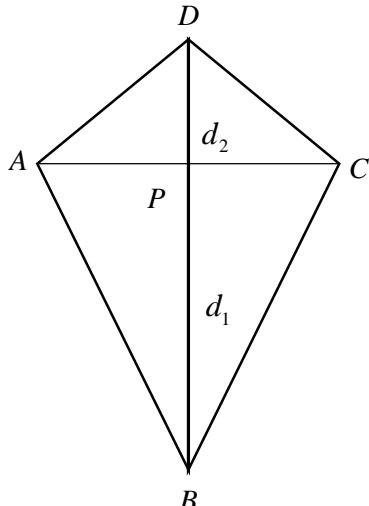
$L = a \times t$

$K = 2a + 2l$

E. BELAHKETUPAT

Belahketupat adalah segiempat yang memiliki dua pasang sisi sejajar dan kedua diagonal bidangnya tegak lurus.

Sebuah belahketupat dengan panjang sisinya *a*, maka luas dan keliling belahketupat adalah:

$$L = \frac{d_1 \times d_2}{2}$$

$K = 4a$

d_1 : diagonal pertama

d_2 : diagonal kedua

Sifat-sifat belahketupat:

1. Memiliki dua pasang sisi sejajar dan sama panjang.
2. Semua sisi belahketupat adalah sama panjang.
3. Memiliki dua diagonal yang saling tegak lurus.
4. Dua pasang sudut yang berhadapan sama besar.

F. LAYANG-LAYANG

Layang-layang adalah segiempat yang memiliki dua pasang sisi yang sama panjang dan dua diagonalnya saling tegak lurus.

Sebuah layang-layang dengan panjang sisi s_1 dan s_2, maka luas dan keliling belahketupat adalah:

$$L = \frac{d_1 \times d_2}{2}$$

$$K = 2s_1 + 2s_2$$

d_1 : diagonal terpanjang

d_2 : diagonal terpendek

Soal dan Pembahasan

1. Misalkan *KLMN* adalah sebuah persegi yang memiliki panjang sisi *r* cm dan *ABCD* adalah sebuah persegipanjang dengan panjang sisi *AB* = *p* cm dan panjang sisi *CD* adalah *l* cm. Buktikan jika keliling persegi adalah 2 kali keliling persegipanjang maka $\frac{Luas\ ABCD}{Luas\ KLMN} = \frac{l}{r} - \left(\frac{l}{r}\right)^2$

   Jawab:

   Luas persegipanjang $ABCD = p \times l$

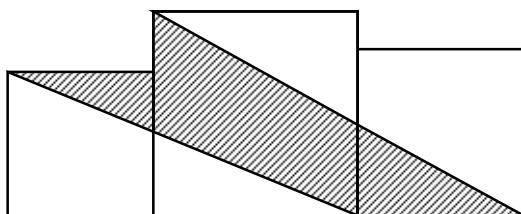
   Luas persegi $KLMN = r \times r = r^2$

   Keliling persegipanjang $ABCD = 2p + 2l$

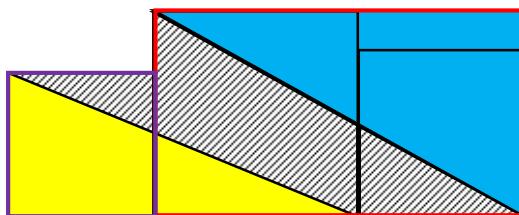
   Keliling persegi $KLMN = 4r$

   Diketahui keliling persegi *ABCD* = 2 kali keliling persegipanjang *ABCD*, maka:

   $2(2p + 2l) = 4r$

   $4p + 4l = 4r$

   $p + l = r$

   $p = r - l$

   $$\frac{Luas\ ABCD}{Luas\ KLMN} = \frac{p \times l}{r^2} = \left(\frac{r-l}{r^2}\right) = \frac{rl - l^2}{r^2} = \frac{l}{r} - \left(\frac{l}{r}\right)^2$$

   $$\frac{Luas\ ABCD}{Luas\ KLMN} = \frac{l}{r} - \left(\frac{l}{r}\right)^2 \text{ (terbukti)}$$

2. Tiga persegi masing-masing panjang sisinya 6 cm, 10 cm dan 8 cm ditempatkan seperti pada gambar di samping. Tentukan luas daerah yang diarsir.

   Jawab:

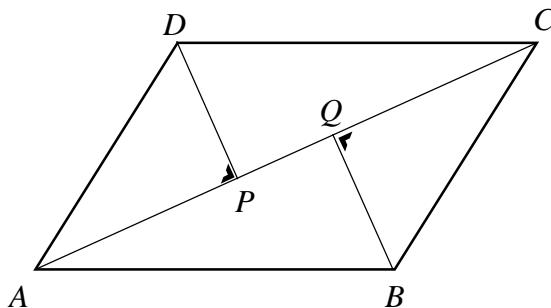
   Misal

Persergi adalah bidang dengan batas ungu berukuran 6 cm × 6 cm

Persergipanjang adalah bidang dengan batas merah 18 cm × 10 cm

Segitiga I adalah bidang warna kuning dengan alas = 16 cm dan tinggi 6 cm.

Segitiga II adalah bidang warna biru dengan alas = 18 cm dan tinggi 10 cm.

Sehingga:

L. arsiran = L. Persegi + L. Persegipanjang – (L. Segitiga I + L. Segitiga II)

$= 6^2 + 18 \cdot 10 - (\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 10)$

$= 36 + 180 - (48 + 90)$

$= 216 - 138$

$= 78$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah 78 cm^2.

3. Diketahui jajargenjang *ABCD*. Titik *P* dan *Q* terletak pada *AC* sehingga *DP* dan *BQ* tegak lurus *AC*. Jika panjang *AD* = 13 cm, *AC* = 25 cm dan luas jajargenjang tersebut adalah 125 cm^2. Maka panjang *BQ* adalah ... cm

Jawab:

Diketahui:

AD = *BC* = 13 cm

$AC = 25$ cm

Luas jajargenjang = 125 cm^2

Perhatikan segitiga ACD:

Luas segitiga $ACD = \frac{1}{2} \times$ Luas jajargenjang

$\frac{1}{2} \times AC \times DP = \frac{1}{2} \times 125$

$25 \times DP = 125$

$DP = \frac{125}{5} = 5$

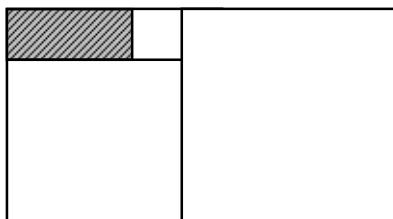
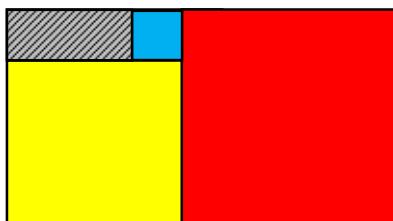
ΔAPD merupakan segitiga siku-siku (siku-siku di P):

$BE = \sqrt{AD^2 - DP^2}$

$= \sqrt{13^2 - 5^2}$

$= \sqrt{169 - 25}$

$= \sqrt{144} = 12$

Sehingga:

$PQ = AC - (AP + CQ)$

$= 25 - (12 + 12)$

$= 25 - 24 = 1$

Jadi, panjang PQ adalah 1 cm.

4. Persegipanjang besar berukuran 9 cm $\times$ 5 cm. Daerah yang diarsir adalah satu-satunya bangun di dalam persegipanjang yang bukan persegi. Berapakah luas daerah yang diarsir.

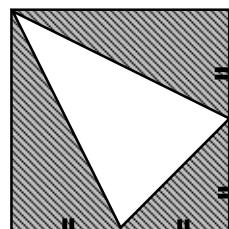
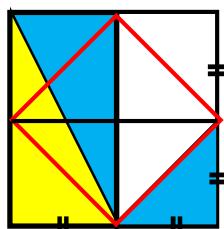
Jawab:

Diketahui ukuran persegipanjang besar: panjang = 9 cm dan lebar = 5 cm

Karena hanya daerah arsiran yang bukan merupakan persegi, berarti bidang datar lainnya merupakan persegi (bidang yang berwarna).

Misal:

Persegi A bidang berwarna merah: panjang sisi persegi A = 5 cm

Persegi B bidang berwarna kuning: panjang sisi persegi B = 4 cm

Persegi C bidang berwarna biru: panjang sisi persegi C = 1 cm

Panjang persegipanjang = panjang sisi persegi B – panjang sisi persegi C

= 4 – 1 = 3

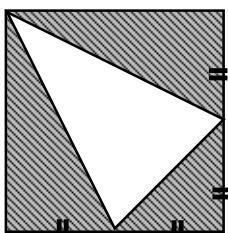
Lebar persegi panjang = panjang sisi persegi A – panjang sisi persegi B

= 5 – 4 = 1

Sehingga, luas persegipanjang arsiran $= 3 \times 1$

$= 3$ cm^2.

5. Persegi pada gambar disamping memiliki luas satu satuan luas. Pecahan yang menyatakan luas dari daerah yang tidak diarsir adalah ...

Jawab:

dengan menggunakan gambar (berdasar gambar pada soal):

- ada dua buah segitiga siku-siku yang kongruen dan sebuah segitiga siku-siku samakaki.
- satu dari dua buah segitiga siku-siku yang kongruen digeser sehingga gabungan keduanya mebentuk sebuah persegi panjang (lihat gambar).
- dibuat garis horizontal (datar) dan garis vertikal (tegak) yang membagi persegi menjadi 4 bagian persegi kecil yang kongruen.
- dibuat garis diagonal persegi-persegi kecil (garis warna merah) yang membagi sebuah persegi kecil menjadi 2 bagian (segitiga) yang sama besar.
- dari langkah-langkah di atas, dalam persegi besar diperoleh 8 bagian berbentuk segitiga siku-siku samakaki yang kongruen dengan 3 bagian yang tidak terarsir.
- sehingga, luasan yang tidak diarsir adalah 3 per 8 bagian.

Jadi, pecahan untuk luas dari daerah yang tidak diarsir adalah $\frac{3}{8}$.

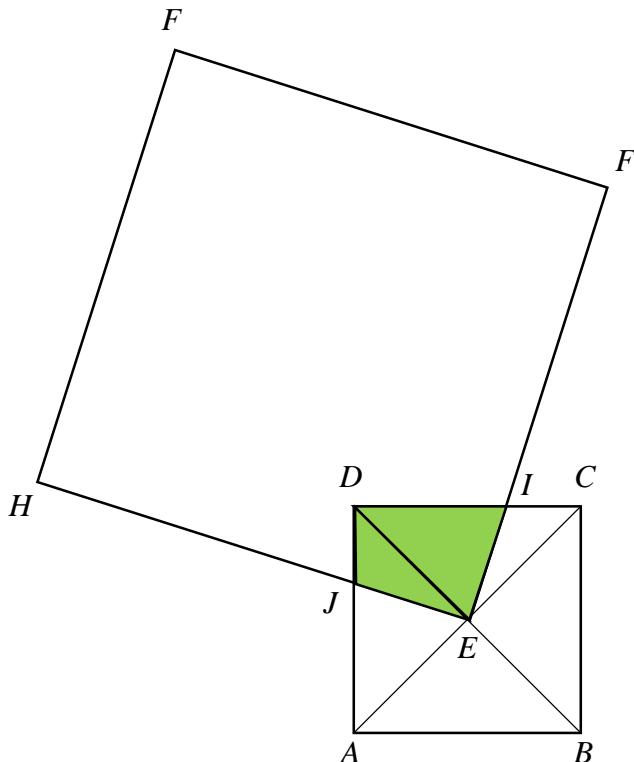
Alternatif penyelesaian:

Perhatikan gambar

Terdapat dua segitiga siku-siku yang saling kongruen dengan panjang sisi-sisinya yang saling tegak lurus adalah 1 dan $\frac{1}{2}$. Sebuah segitiga siku-siku sama kaki dengan panjang sisi yang sama yaitu $\frac{1}{2}$. Sehingga:

L. arsiran = $L._{ABCD}$ – (2 × L. Segitiga I + L. Segitiga II

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{3}{8}$$

Jadi, luas dari daerah yang tidak diarsir adalah $\frac{3}{8}$

6. Diketahui $ABCD$ adalah persegi. Titik E merupakan perpotongan AC dan BD pada persegi $ABCD$ yang membentuk persegi baru $EFGH$. EF berpotongan dengan CD di I dan EH berpotongan dengan AD di J. Panjang sisi $ABCD$ adalah 4 cm dan panjang sisi $EFGH$ adalah 8 cm. Jika $\angle EID = 60°$, maka luas segiempat $EIDJ$ adalah ... cm^2.

   Jawab:

   Cara I

   Perhatikan gambar berikut.

   Perhatikan segitiga EJD kongruen dengan segitiga EIC, maka luas segitiga EJD = luas segitiga EIC. (mengapa?)

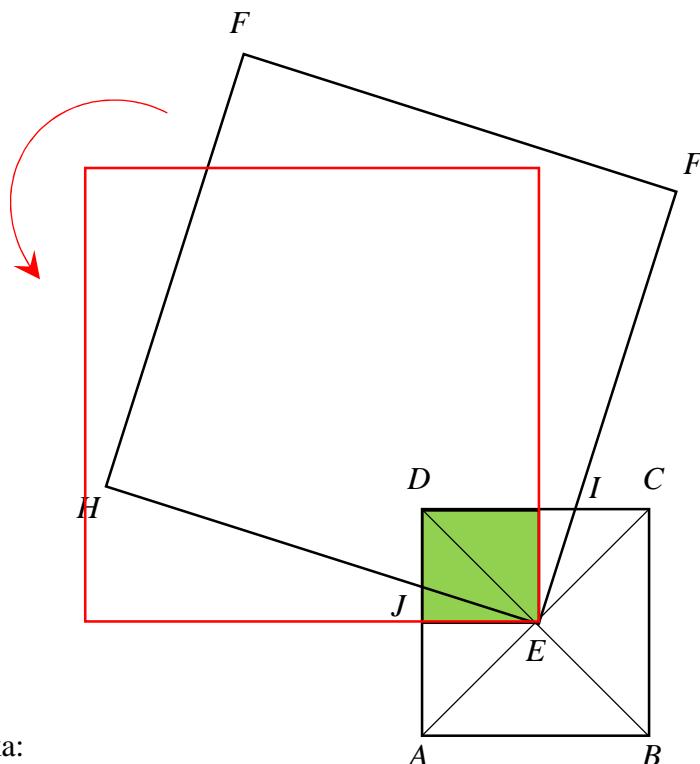
   Sehingga:

   Luas segiempat $EIDJ$ = Luas segitiga DEI + Luas segitiga EJD

   = Luas segitiga DEI + Luas segitiga EIC

   = luas segitiga CDE

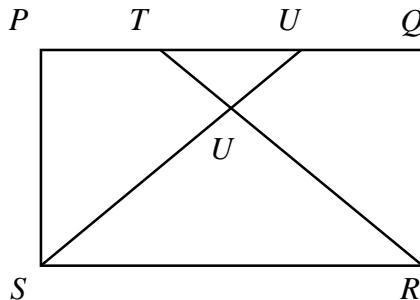
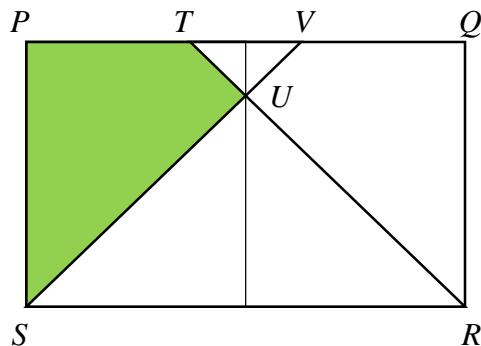
   Dengan demikian:

Luas segitiga CDE = $\frac{1}{4} \times$ Luas persegi $ABCD$

$= \frac{1}{4} \times 4^2$

$= 4 \text{ cm}^2$

Jadi, luas segiempat *EIDJ* adalah 4 cm^2.

Alternatif penyelesaian:

Dengan rotasi bidang segiempat *EIDJ* dengan pusat *E* dan persegi *ABCD* tetap, dengan arah berlawanan arah jarum jam (arah positif) sedemikian sehingga *EF* tegak lurus *CD*. Seperti pada gambar berikut:

Maka:

Luas segiempat EIDJ = Luas segiempat EIDJ

$= 2^2 = 4 \text{ cm}^2$

Jadi, luas segiempat *EIDJ* adalah 4 cm^2.

7. Diketahui persegi panjang *PQRS*. Panjang *PV* = *QT* = *PS* = 6. Titik *U* adalah perpotongan antara garis *SV* dan *RT* (seperti gambar di samping). Jika *PQ* = 10 maka, luas segiempat *PTUS* adalah ...

Jawab:

Diketahui:

PV = *QT* = *PS* = 6

PQ = *SR* = 10

TV = 6 + 6 – 10 = 2

Misal:

Tinggi segitiga *TUV* = *t*

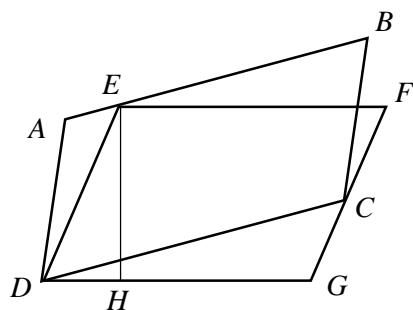
Tinggi segitiga *SUR* = 6 – *t*

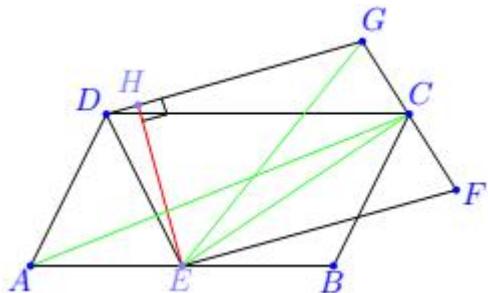
Perhatikan segitiga *TUV* dan segitiga *SUR*:

$$\frac{\text{Tinggi } \Delta TUV}{\text{Tinggi } \Delta SUR} = \frac{TV}{SR}$$

$$\frac{t}{6-t} = \frac{2}{10}$$

$10t = 12 - 2t \quad \Rightarrow \quad 12t = 12 \quad \Rightarrow \quad t = 1$

Sehingga:

Luas *PTUS* = Luas ΔPVS – Luas ΔTUV

$$= \frac{1}{2} \times PV \times PS - \frac{1}{2} \times TV \times t$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 17$$

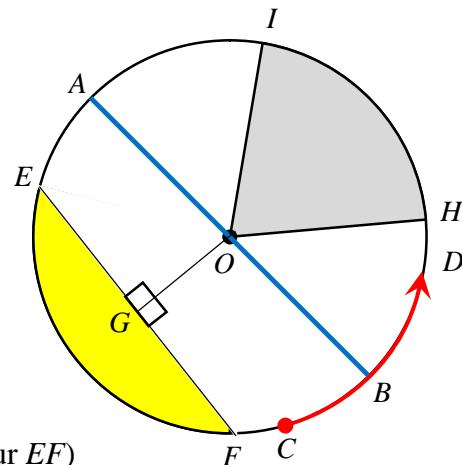
Jadi, segiempat *PTUS* adalah 17.

8. Diketahui *ABCD* dan *DEFG* adalah dua jajargenjang. Titik *E* terletak pada *AB* dan titik *C* terletak pada *FG*. Luas *ABCD* adalah 20 satuan. *H* adalah titik pada *DG* sehingga *EH* tegak lurus *DG*. Jika panjnag *DG* adalah 5 satuan, tentukan panjang *EH*.

Jawab:

Perhatikan ΔACD dan ΔCED yang keduanya memiliki alas berhimpit yaitu *CD*. Karena *AB*//*CD* maka ΔACD dan ΔCED memiliki tinggi yang sama panjang. Oleh karena itu, luas ΔACD = luas ΔCED = setengah luas *ABCD* = 10 satuan luas.

Perhatikan ΔCED dan ΔEDG yang keduanya memiliki alas berhimpit yaitu *DE*. Karena *DE*//*GF* maka ΔCED dan ΔEDG memiliki tinggi yang sama panjang. Oleh karena itu, luas ΔEDG = luas ΔCED = 10 satuan luas.

Dengan demikian, luas *DEFG* = 2 × luas *EDG* = 20 satuan luas. Padahal luas *DEFG* = *DG* × *EH* = 5*EH*. Jadi, diperoleh *EH* = 4 satuan panjang.

LINGKARAN

A. PENGERTIAN LINGKARAN

Lingkaran (*circle*) adalah lengkung tertutup yang semua titik-titik pada lengkung itu berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu (titik O) dalam lengkungan tersebut. Titik O dalam lengkungan itu disebut pusat lingkaran dan jarak tersebut disebut jari-jari lingkaran (dinotasikan dengan r)

Unsur-unsur lingkaran:

1. Pusat lingkaran (titik O)
2. Jari-jari lingkaran ($OA = OB$)
3. Diameter atau garis tengah lingkaran

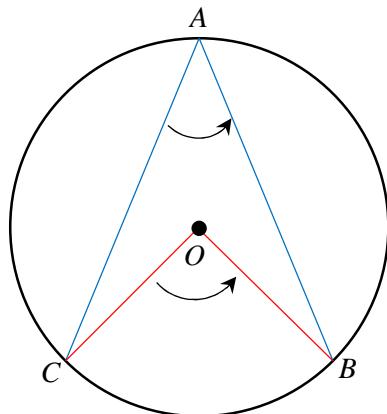
   Ruas garis AB
4. Busur (garis lengkung EF, IH, dan CD)
5. Tali busur (ruas garis EF)
6. Apotema tali busur (garis $OG \perp$ tali busur EF)
7. Daerah Tembereng

   Daerah yang dibatas oleh busur EF dan tali busur EF (warna kuning)
8. Daerah Juring (daerah yang dibatasi dua jari-jari/daerah abu-abu)

$d = 2r$ atau $r = \frac{1}{2}d$

$K = \pi d$ atau $K = 2\pi r$

$L = \pi r^2$ atau $L = \frac{1}{4}\pi d^2$

Dengan:

K = Keliling lingkaran

L = Luas lingkaran

Nilai Phi

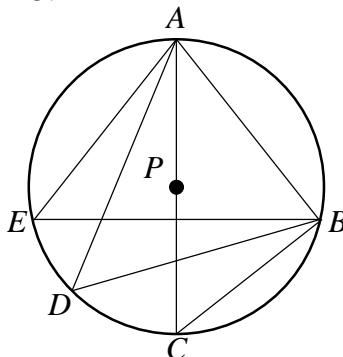
$\pi \approx 3{,}14$ atau $\pi \approx \frac{22}{7}$

B. SUDUT PUSAT DAN SUDUT KELILING

Sudut pusat adalah sudut yang dibentuk oleh dua jari-jari lingkaran yang menghadap busur lingkaran.

Sudut keliling adalah sudut yang dibentuk oleh dua tali busur yang berpotongan pada keliling lingkaran.

$\angle BOC$ adalah sudut pusat

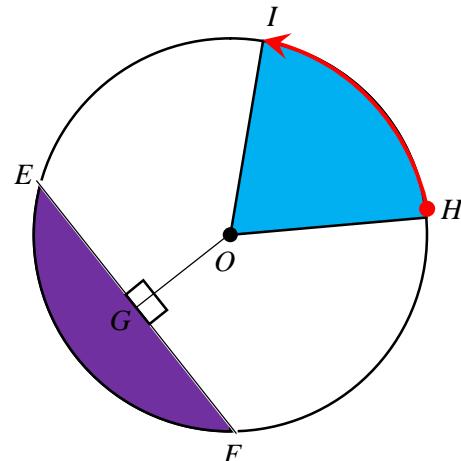
$\angle BAC$ adalah sudut keliling

$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$

$\angle BOC = 2\angle BAC$

Sudut satu putaran penuh adalah 360°

Contoh

Perhatikan gambar di samping ini. Diketahui $\angle AEB = 62°$. Hitunglah besar $\angle ADB$, $\angle ACB$, dan $\angle ABC$.

Jawab:

Sifat-sifat sudut pusat dan sudut keliling

- Sudut-sudut keliling yang menghadapat busur yang sama mempunyai besar sudut yang sama. Pada gambar, terlihat bahwa $AEB = \angle ADB = \angle ACB = 62°$.
- Besar sudut keliling yang menghadap diameter adalah 90°. Pada gambar, terlihat bahwa $\angle ABC$ menghadap busur AC, berarti $\angle ABC = 90°$.

C. PANJANG BUSUR DAN LUAS JURING

Juring adalah daerah dalam lingkarang yang dibatasi oleh dua jari-jari dan busur yang diapit oleh kedua jari-jari tersebut.

Temberang adalah daerah dalam lingkarang yang dibatasi oleh sebuah tali busur dan busur dihadapan tali busur.

Panjang busur berbanding lurus dengan keliling lingkaran:

$$\text{Panjang Busur} = \frac{sudut\ pusat}{180°} \times \pi r$$

Luas juring berbanding lurus dengan luas lingkaran:

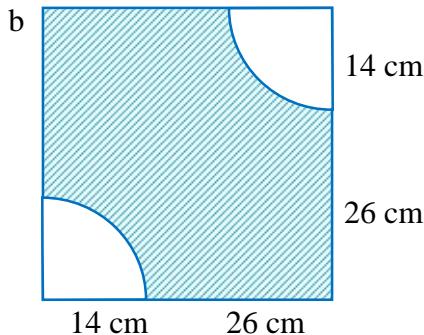
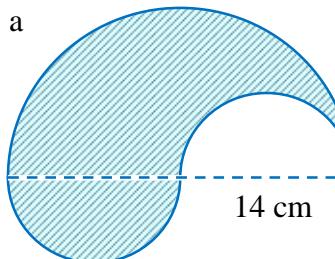
$$\text{Luas Juring} = \frac{sudut\ pusat}{360°} \times \pi r^2$$

Contoh

Suatu juring diketahui ukuran sudut pusatnya adalah 72° dan jari-jarinya 20 cm. Tentukan jari-jari lingkaran yang luasnya samadengan juring tersebut.

Jawab:

$$\frac{72°}{360°} \times 3{,}14 \times 20 \times 20 = \pi r^2$$

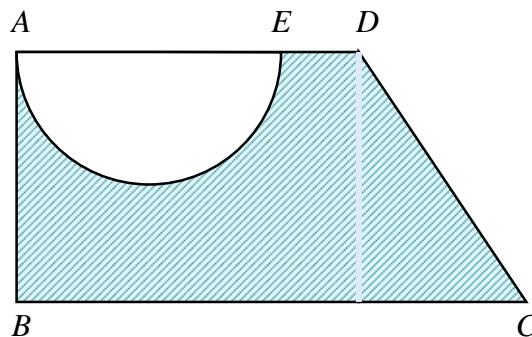
$$\frac{1}{5} \times 3{,}14 \times 20 \times 20 = 3{,}14 \times r^2$$

$$r^2 = 80$$

$$r = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Jadi, jari-jari lingkaran yang luasnya samadengan juring tersebut adalah $4\sqrt{5}$.

Soal dan Pembahasan

1. Tentukan keliling daerah yang diarsir pada bangun berikut.

Jawab:

a. Keliling daerah terarsir = setengah keliling lingkaran besar + keliling lingkaran kecil

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\text{®} r_1 + 2\text{®} r_2$$

$$= \frac{22}{7} \cdot 14 + \frac{22}{7} \cdot 7 = 66 \text{ cm}$$

b. Keliling daerah terarsir = keliling persegi + setengah keliling lingkaran

$$= 4s + \frac{1}{2} \cdot 2\text{®} r$$

$$= 4 \cdot 26 + \frac{22}{7} \cdot 14 = 148$$

2. Tentukan keliling daerah yang diarsir pada gambar berikut. (AB = 15 cm, AD = 19 cm, DE = 5 cm, BC = 27 cm).

Jawab:

$AB = 15$

$AD = 19$

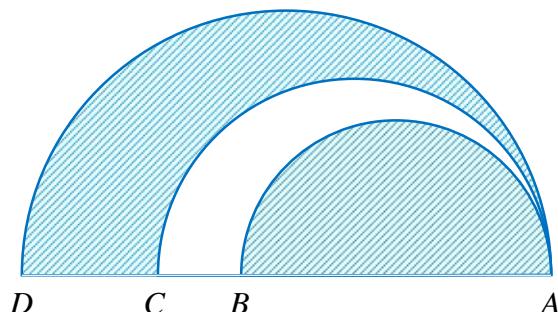
$DE = 5$

$BC = 27$

$AE = AD - DE = 19 - 5 = 14$

Perhatikan bahwa ΔCPD segitiga siku-siku (siku-siku di P), dengan teorema Pythagoras diperoleh:

$$
\begin{aligned}
DC &= \sqrt{PD^2 + PC^2} \\
&= \sqrt{15^2 + 8^2} \\
&= \sqrt{225 + 64} \\
&= \sqrt{289} = 17
\end{aligned}
$$

Keliling setengah lingkaran berdiameter AE dengan $AE = 14$ ($r = 7$):

$$\overset{\frown}{AE} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \frac{22}{7} \cdot 7 = 22$$

Sehingga keliling daerah yang diarsir:

$$AB + BC + DC + ED + \overset{\frown}{AE} = 15 + 27 + 17 + 5 + 22 = 86$$

Jadi, keliling daerah yang diarsir adalah 86 cm.

3. Diketahui titik A, B, C, dan D segaris. Panjang $AD = 42$ cm, $AC = 28$ cm, $BC = 7$ cm. Tentukan luas daerah yang diarsir berikut.

Jawab:

Diameter setengah lingkaran:

$AD = 42$ cm $\rightarrow$ $r = 21$ cm

$AC = 28$ cm $\rightarrow$ $r = 14$ cm

$AB = AC - BC = 28 - 7 = 21$ $\rightarrow$ $r = 10,5$ cm

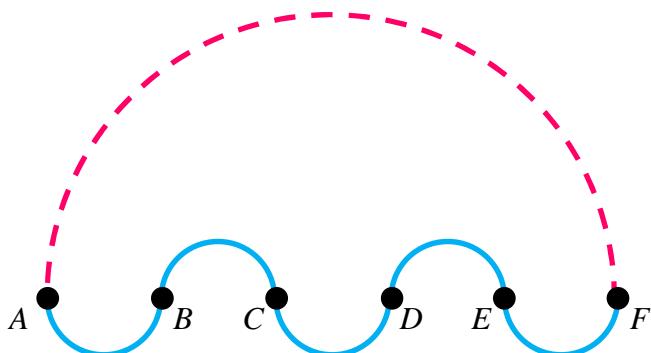
Luas setengah lingkaran AD (x) $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{7} \cdot 21 \cdot 21 = 693 \text{ cm}^2$

Luas setengah lingkaran AC (y) $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{7} \cdot 14 \cdot 14 = 308 \text{ cm}^2$

Luas setengah lingkaran AB (z) $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{7} \cdot 10,5 \cdot 10,5 = 173,25 \text{ cm}^2$

Luas daerah yang terarsir $= (x - y) + z$

$= (693 - 308) + 173,25$

$= 385 + 173,25 = 558,25 \text{ cm}^2$

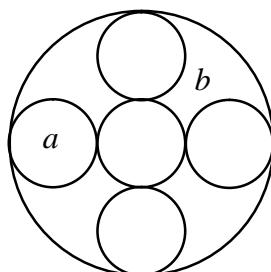
Jadi, luas daerah yang terarsir adalah 558,25 cm^2.

4. Dua lintasan dari A ke F digambarkan sebagai berikut.

Jarak A ke F dalam garis lurus adalah 70 meter. Titik B, C, D, dan E berada pada garis AF sedemikian sehingga $AB = BC = CD = DE = EF$. Lintasan pertama yang ditandai warna merah putus-putus berbentuk setengah lingkaran dengan diameter AF. Lintasan kedua, ditandai dengan warna biru, tersusun atas lima setengah lingkaran dengan diameter AB, BC, CD, DE, dan EF. Erna dan Erni bersepeda dari A ke F. Erna memilih melintasi lintasan merah, sedangkan Erni memilih lintasan biru. Jika mereka berangkat pada waktu yang sama dan kecepatan yang sama, maka siapakah yang akan lebih dulu sampai di F?

Jawab:

Keliling setengah lingkaran AF $= \frac{1}{2} \cdot 2\pi r$

$= \frac{22}{7} \cdot 35 = 110$

Panjang lintasan warna merah putus-putus adalah 110 meter.

Keliling setengah lingkaran AB $= \frac{1}{2} \cdot 2\pi r$

$= \frac{22}{7} \cdot 7 = 22$

Panjang lintasan warna biru adalah $5 \times 22 = 110$ meter.

Bisakah kamu menentukan siapa yang lebih cepat sampai ke F?

5. Misalkan a dan b menyatakan luas daerah yang diarsir pada gambar dibawah. Kelima lingkaran kecil berjari-jari r. Titik-titik pusat empat lingkaran kecil yang menyinggung lingkaran besar merupakan titik-titik sudut persegi. Jika a sama dengan 10 cm^2, maka b = ...

Jawab:

Misal jari-jari lingkaran kecil = r dan jari-jari lingkaran bersar = R, maka:

$a = \pi.r^2$ Jari-jari lingkaran besar = 6 × jari-jari lingkaran kecil

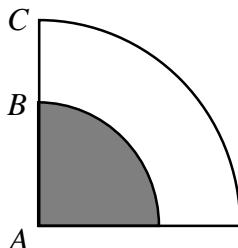
$10 = \pi.r^2$ $R = 6r$

$r^2 = \frac{10}{\pi}$ $R^2 = (6r)^2$

$R^2 = 36r^2$

$r = \sqrt{\frac{10}{\pi}}$ $R^2 = 36 \cdot \left(\sqrt{\frac{10}{\pi}}\right)^2 \rightarrow R^2 = 36 \cdot \frac{10}{\pi} \rightarrow R^2 = \frac{360}{\pi}$

$$\text{Luasan } b = \frac{Luas \odot_{besar} - 5 \times Luas\ a}{4}$$

$$= \frac{\pi R^2 - 5 \times 10}{4}$$

$$= \frac{\pi \cdot \frac{360}{\pi} - 50}{4}$$

$$= \frac{360 - 50}{4}$$

$$= \frac{310}{4} = 77{,}5 \text{ cm}^2.$$

Jadi, $b = 77{,}5$ cm^2.

6. Luas daerah yang diarsir setengah dari luas daerah yang tidak diarsir. Panjang $AB \div AC$ adalah ...

Jawab:

Misal:

Luas daerah terarsir = x

Luas daerah yang tidak terarsir = $2x$

$$\frac{\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot AB^2}{\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot AC^2}=\frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \frac{AB^2}{AC^2}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{AB}{AC}\right)^2=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{AC}=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Jadi, panjang AB dibagi panjang AC adalah $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

BAB 4

KOMBINATORIKA

COMBINATORICS

SUBBAB

- **Faktorial**
- **Permutasi**
- **Kombinasi**

Albert Einstein

Imajinasi lebih berharga daripada ilmu pengetahuan. Logika akan membawa Anda dari A ke B. Sedangkan imajinasi akan membawa Anda hingga kemanapun

FAKTORIAL

A. ATURAN PERKALIAN

Jika terdapat k unsur yang tersedia, dengan:

n_1 = banyak cara untuk menyusun unsur pertama

n_2 = banyak cara untuk menyusun unsur kedua setelah unsur pertama tersusun

n_3 = banyak cara untuk menyusun unsur ketiga setelah unsur kedua tersusun

⋮

n_k = banyak cara untuk menyusun unsur ke- k setelah objek unsur sebelumnya tersusun

Maka banyak cara untuk menyusun k unsur yang tersedia adalah:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$$

Contoh

1. Dari kota A ke kota B dapat ditempuh dengan 4 jalur, dari kota A ke kota C dapat ditempuh dengan 3 jalur, dari kota B maupun C ke kota D dapat ditempuh dengan 3 jalur, dan dari kota B ke kota C terhubung dengan 1 jalur. Tentukan banyak pilihan jalur dari kota A ke kota D.

   Jawab:

   Jika dari kota A ke kota D melalui jalur B, maka banyak pilihan jalur adalah:

   $(4 \times 1 \times 3) + (4 \times 3) = 24$ cara

   Jika dari kota A ke kota D memilih jalur C, maka banyak pilihan jalur adalah:

   $(3 \times 1 \times 3) + (3 \times 3) = 18$ cara

   Jadi, banyak pilihan jalur dari kota A ke kota D adalah 42 jalur.

2. Seorang manager supermarket ingin menyusun barang berdasarkan nomor seri barang. Dia ingin menyusun nomor seri dimulai dari nomor 3000 sampai dengan 8000 dan tidak memuat angka yang sama. Tentukan banyak nomor seri yang disusun dari angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

   Jawab:

- Setiap bilangan yang berada diantara 3000 dan 8000 pastilah memiliki banyak angka yang sama yakni 4 angka:
- Untuk mengisi angka ribuan hanya dapat diisi angka 3, 4, 5, 6, 7. Artinya terdapat 5 cara mengisi ribuan.
- Untuk mengisi ratusan dapat diisi angka 1 sampai 8 tetapi hanya ada 7 kemungkinan (mengapa?)
- Untuk mengisi puluhan dapat diisi angka 1 sampai 8 tetapi hanya ada 6 angka yang mungkin (mengapa?)
- Untuk mengisi satuan dapat diisi angka 1 sampai 8 tetapi hanya ada 5 angka yang mungkin (mengapa?)
- Dengan demikian, banyak angka yang dapat mengisi keempat posisi tersebut adalah sebagai berikut:

5	7	6	5

Banyak susunan nomor seri yang diperoleh adalah $5 \times 7 \times 6 \times 5 = 1.050$ cara.

B. N FAKTORIAL

Jika n bilangan asli maka $n!$ (dibaca "n faktorial") didefinisikan dengan:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

atau

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-3) \times (n-2) \times (n-1) \times n$$

$0! = 1$

Contoh

1. Hitunglah:

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Soal dan Pembahasan

1. Nyatakan bentuk-bentuk berikut dalam bentuk faktorial.

   a. $7 \times 6 = \dfrac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1} = \dfrac{7!}{5!}$

   b. $(6!) \times 7 \times 8 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8!$

2. Hitunglah:

   a. $\dfrac{7!}{4!} = \dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{4!} = 210$

   b. $\dfrac{(n+2)!}{n!} = \dfrac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1)$

   c. $\dfrac{(n-2)!}{(n+1)!} = \dfrac{(n-2)!}{(n+1)(n)(n-1)(n-2)!} = \dfrac{1}{(n+1)(n)(n-1)}$

3. Diketahui $\dfrac{14\cdot(n-1)!\cdot(n-4)!}{5\cdot n!\cdot(n-5)!} = \dfrac{4!}{120}$, tentukanlah nilai n, n merupakan bilangan asli.

   Jawab:

   $$\frac{14\cdot(n-1)!\cdot(n-4)!}{5\cdot n!\cdot(n-5)!} = \frac{4!}{120} \Leftrightarrow \frac{14\cdot(n-1)!\cdot(n-4)!}{5\cdot n!\cdot(n-1)!\cdot(n-5)(n-4)!} = \frac{4!}{120}$$

   $$\Leftrightarrow \frac{14}{5\cdot n\cdot(n-5)} = \frac{4!}{120}$$

   $$\Leftrightarrow \frac{14}{n\cdot(n-5)} = \frac{5!}{120}$$

   $$\Leftrightarrow n^2 - 5n - 14 = 0$$

   $$\Leftrightarrow (n-7)(n+2) = 0$$

   Diperoleh:

   $n = 7$ atau $n = -2$

   Jadi, nilai n yang memenuhi adalah 7.

4. Nilai $\frac{1}{8!}-\frac{2}{9!}+\frac{3}{10!}$ = ...

Jawab:

$$\frac{1}{8!}-\frac{2}{9!}+\frac{3}{10!} = \frac{1\cdot 9\cdot 10}{10\cdot 9\cdot 8!}-\frac{2\cdot 10}{10\cdot 9!}+\frac{3}{10!}$$

$$= \frac{90}{10!}-\frac{20}{10!}+\frac{3}{10!} = \frac{73}{10!}$$

Jadi, nilai $\frac{1}{8!}-\frac{2}{9!}+\frac{3}{10!} = \frac{73}{10!}$.

5. Hasil penjumlahan 1! + 2! + 3! + ... + 2011! adalah suatu bilangan yang angka satuannya adalah ...

Jawab:

$1! = 1$

$2! = 2 \times 1$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 840$

$\vdots$

$2011! = 2011 \times 2010! = ...0$

Dengan demikian:

1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + ... + 2011!

$\Leftrightarrow$ 1 + 2 + 6 + 24 + ...0 + ... 0 + ... 0

$\Leftrightarrow$ 33

Jadi, satuan dari hasil penjumlahan 1! + 2! + 3! + ... + 2011! adalah 3.

PERMUTASI

Permutasi k unsur dari n unsur yang tersedia biasanya dituliskan P_k^n atau ${}_nP_k$ serta $P(n, k)$ dengan $k \leq n$. Dibeberapa negara P_k^n juga ditulis dengan P_n^k.

Banyak permutasi n unsur ditentukan dengan aturan

$$P_k^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

Banyak permutasi k unsur dari n unsur yang tersedia, dapat ditentukan dengan:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Sifat-sifat

Diketahui $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$, dengan $n \geq k$.

1) Jika $n - k = 1$, maka $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n!$

2) Jika $k = 1$, maka $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n$.

3) Jika $n - k = 0$, maka $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n!$

Misalkan dari n unsur terdapat $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ unsur yang sama dengan:

$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n \leq n$. Banyak permutasi dari n unsur tersebut adalah

$$P_{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n}^n = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$

Misalkan dari n unsur yang berbeda yang tersusun melingkar. Banyak permutasi siklis dari n unsur tersebut dinyatakan:

$$P_{siklis} = (n-1)!$$

Soal dan Pembahasan

1. Dari kata MATH. Tentukan susunan kata yang mungkin.

   Jawab:

   Terdapat 24 permutasi pada kata MATH, yaitu

MATH	MAHT	MTAH	MTHA	MHTA	MHAT
AMTH	AMHT	ATMH	ATHM	AHTM	AHMT
TAMH	TAHM	TMAH	TMHA	THMA	THAM
HATM	HAMT	HTAM	HTMA	HMTA	HMAT

   Dengan rumus:

   $$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \Rightarrow \quad P_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!} = 24.$$

2. Berapa banyak susunan yang dapat dibentuk dari 3 huruf yang diambil dari huruf-huruf pembentuk kata K O G N I T I V I S T I K?

   Jawab:

   Tersedia 13 unsur dalam kata tersebut, yaitu huruf-huruf K, O, G, N, I, T, I, V, I, S, T, I, K. Dari 13 unsur yang tersedia memuat 4 huruf I yang sama, 2 huruf K yang sama dan 2 huruf T yang sama.

   Jika kita partisi banyak huruf pembentuk kata K O G N I T I V I S T I K adalah sebagai berikut:

   $$k_K + k_O + k_G + k_N + k_I + k_T + k_V + k_S = 2 + 1 + 1 + 1 + 4 + 2 + 1 + 1 = 13$$

   Jadi, permutasi yang melibatkan unsur yang sama, dihitung dengan:

   $$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_n!} = \frac{13!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 129.729.600 \text{ cara.}$$

3. Lima orang akan pergi ke pantai menggunakan sebuah mobil berkapasitas 6 tempat duduk. Jika hanya ada dua orang yang bisa menjadi sopir. maka banyaknya cara mengatur tempat duduk di dalam mobil adalah ...

   Jawab

   Misal yang dapat menjadi sopir adalah A dan B

Penumpang: A, B, C, D, dan E

Sehingga akan terdapat dua pola tempat duduk:

Pola I:

B	A
C	D
E	

Banyak cara mengatur tempat duduk pada pola I:

$${}_5P_4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

Pola II:

A	B
C	D
E	

Banyak cara mengatur tempat duduk pada pola II:

$${}_5P_4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

Jadi, banyak cara mengatur tempat duduk mereka adalah 120 + 120 = 240.

4. Terdapat enam orang di sebuah meja bundar. Tentukan permutasi jika dua orang yang dijadikan sebagai pusat/sumbu.

Jawab:

$$\begin{aligned}(n-2)! &= (6-2)! \\ &= 4! \\ &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 24 \text{ cara}\end{aligned}$$

KOMBINASI

Kombinasi k unsur dari n unsur biasa dituliskan C_k^n; ${}_nC_k$; $C(n, k)$ atau $\binom{n}{k}$

Banyak kombinasi k unsur dari n unsur yang tersedia, tanpa memperhatikan urutan susunannya dapat ditentukan dengan:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$, dengan $n \geq k$, n, k merupakan bilangan asli.

Sifat-sifat:

Diketahui $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$, dengan $n \geq k$.

1) Jika $n - k = 1$, maka $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = n$.
2) Jika $k = 1$, maka $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = n$.
3) Jika $n = k$, maka $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = 1$.
4) Jika $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$, maka $C_k^n = \frac{P_k^n}{k!}$

Soal dan Pembahasan

1. Hasil seleksi PASKIBRA di Kabupaten Bantul tahun 2012, panitia harus memilih 3 PASKIBRA sebagai pengibar bendera dari 5 PASKIBRA yang terlatih, yaitu Abdul, Beny, Cyndi, Dayu, dan Edo. 3 PASKIBRA yang dipilih dianggap memiliki kemampuan sama, sehingga tidak diperhatikan lagi PASKIBRA yang membawa bendera atau penggerek bendera. Berapa banyak pilihan PASKIBRA yang dimiliki panitia sebagai pengibar bendera?

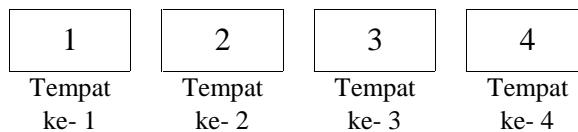
   Jawab: $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$

2. Sebuah panitia yang beranggotakan 4 orang akan dipilih dari kumpulan 4 pria dan 7 wanita. Bila dalam panitia tersebut diharuskan ada paling sedikit 2 wanita. Tentukan banyaknya pilihan susunan panitia tersebut.

   Jawab:

   $${}_7C_2 \cdot {}_4C_2 + {}_7C_3 \cdot {}_4C_1 + {}_7C_4 \cdot {}_4C_0 = \frac{7!}{5!\cdot 2!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}+\frac{7!}{4!\cdot 3!}\cdot\frac{4!}{3!\cdot 1!}+\frac{7!}{3!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{4!\cdot 0!}$$

   $$= 21 \cdot 6 + 35 \cdot 4 + 35 \cdot 1 = 301 \text{ cara}$$

   Jadi, banyaknya pilihan susunan panitia tersebut adalah 301 cara.

3. Tersedia tujuh gambar yang berbeda akan dipilih empat gambar yang akan dipasang membentuk barisan memanjang. Banyaknya cara yang dapat dilakukan jika sebuah gambar yang terpilih harus selalu dipasang di ujung adalah ...

   Jawab:

   Pertama menentukan banyaknya kombinasi gambar yang terdiri dari 4 gambar dari 7 gambar yang tersedia, yaitu sebanyak kombinasi 4 unsur dari 7 unsur berbeda, ditulis:

   $$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!4!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3!4!} = \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1} = 35$$

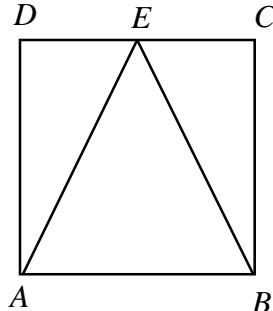
   Terdapat 35 kombinasi yang terdiri dari 4 gambar. Selanjutnya dari 1 kombinasi yang terdiri dari 4 gambar tersebut kita pasangkan pada tempat yang membentuk barisan memanjang. Untuk memudahkan kita sediakan kotak sebagai tempat banyaknya cara yang dapat dilakukan dalam pemasangan gambar tersebut. Jika 1 gambar yang dipilih dari 4 gambar dipasangkan di ujung sebelah kiri, maka banyaknya cara yang dapat dilakukan ada sebanyak:

1	2	3	4
Tempat ke- 1	Tempat ke- 2	Tempat ke- 3	Tempat ke- 4

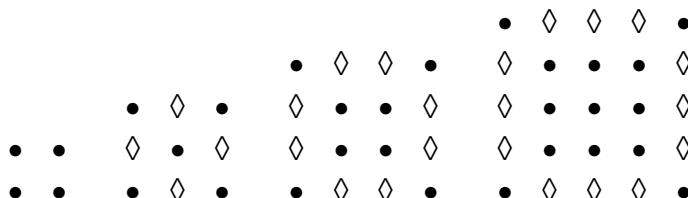
   $1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$ cara, tetapi gambar yang dipilih dapat pula ditempatkan di ujung sebelah kanan (pada tempat ke- 4), sehingga banyaknya cara dari 1 kombinasi yang terdiri 4 gambar ini adalah $6 \times 2 = 12$ cara.

   Jadi, banyaknya cara dari 35 kombinasi sebanyak $= 12 \times 35 = 420$ cara.

BAB 5

SELEKSI

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SUBBAB

- Seleksi tahun 2003
- Seleksi tahun 2004
- Seleksi tahun 2005
- Seleksi tahun 2006
- Seleksi tahun 2007
- Seleksi tahun 2008
- Seleksi tahun 2009
- Seleksi tahun 2010
- Seleksi tahun 2011
- Seleksi tahun 2012
- Seleksi tahun 2013
- Seleksi tahun 2014

SELEKSI TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2003

BAGIAN A: SOAL PILIHAN GANDA

1. $4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 = ...$

   a. 2^7 b. 2^{10} c. 1034 d. 5^4 e. 512

2. Kelipatan persekutuan terkecil dari 210, 42, dan 70 adalah ...

   a. 14 b. 210 c. 420 d. 7 e. 1260

3. Joko tidur malam dari pukul 9.20 dan bangun pagi pukul 4.35. Ia tidur selama ...

   a. 4 jam 45 menit

   b. 5 jam 15 menit

   c. 5 jam 45 menit

   d. 7 jam 15 menit

   e. 19 jam 15 menit

4. Gabah hasil panen sawah mempunyai kadar air 25%. Setelah dijemur kadar airnya menyusut sebanyak 80%. Kadar air gabah tersebut saat ini adalah ...

   a. 2,5% b. 5% c. 10% d. 15% e. 2%

5. Jika a dan b adalah bilangan bulat genap dengan $a > b$, maka banyaknya bilangan bulat ganjil diantara a dan b adalah ...

   a. $\dfrac{a-b}{2}$

   b. $a - b$

   c. $\dfrac{a-b-2}{2}$

   d. $a - b + 1$

   e. Tidak dapat

6. Di dalam suatu lingkaran yang berjari-jari 4 cm dibuat persegi *ABCD*, sehingga titik sudut persegi tersebut berada pada lingkaran. Luas persegi *ABCD* adalah ...

   a. 64 cm^2 c. 16 cm^2 e. 4 cm^2

   b. 32 cm^2 d. 8 cm^2

7. Kendaraan A berjalan dengan laju 60 km/jam. Dua jam berikutnya kendaraan B berjalan dengan laju 80 km/jam berangkat dari tempat dan menuju arah yang sama. Setelah berapa jam kendaraan B menyusul kendaraan A?

   a. 2 jam c. 4 jam e. 6 jam

   b. b. 3 jam d. 5 jam

8. Pada gambar disamping, *ABCD* adalah persegi dan *ABE* adalah segitiga sama sisi. Besar sudut *DAE* adalah ...

   a. 15

   b. 30

   c. 45

   d. 60

   e. 75

9. Faktorisasi prima dari 5220 adalah ...

   a. $2^2 . 3^2 . 145$

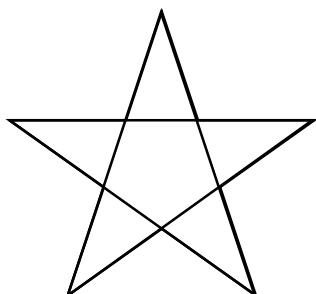
   b. $2^2 . 3^3 . 5 . 9$

   c. $2^2 . 3^2 . 5 . 29$

   d. $2^4 . 3 . 5 . 7$

   e. $2^2 . 3^5 . 5$

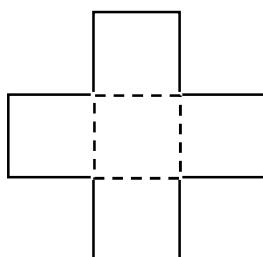
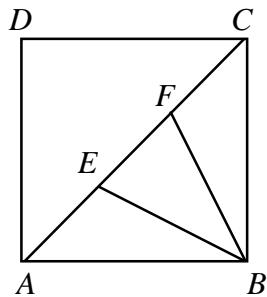
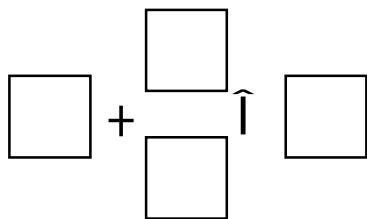
10. Harga sepotong kue turun dari Rp. 250,00. menjadi Rp.200,00 Dengan uang Rp. 4.000,00, berapa potong kue lebih banyak yang dapat dibeli.

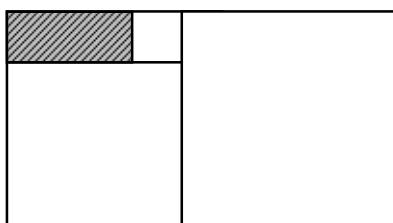
    a. 4 b. 8 c. 20 d. 2 e. 6

BAGIAN B: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Dengan menggunakan angka-angka 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 bilangan 8 angka terbesar yang dapat dibentuk dengan syarat kedua angka 1 dipisahkan oleh satu angka yang lain, kedua angka 2 dipisahkan oleh dua angka, kedua angka 3 dipisahkan oleh tiga angka, dan kedua angka 4 dipisahkan oleh empat angka adalah ...

2. Hasil suatu bilangan genap dan suatu bilangan ganjil adalah 840. Bilangan ganjil yang terbesar yang memenuhi syarat tersebut adalah ...

3. Jumlah dua bilangan sama dengan 12. Hasil kali dua bilangan tersebut nilainya akan paling besar jika salah satu bilangannya adalah ...

4. Perhatikan gambar berikut.

   Banyaknya bulatan hitam pada gambar kesepuluh nantinya adalah ...

5. Banyaknya segitiga pada gambar berikut adalah ...

6. Gambar bangun berikut disusun oleh 5 persegi yang kongruen. Kalau keliling bangun ini 72 cm, maka luas bangun tersebut adalah ...

7. Gambar bangun berikut, *ABCD* adalah persegi dengan sisi 6 satuan. Titik *E* dan *F* membagi diagonal *AC* menjadi tiga bagian sama panjang. Luas segitiga *DEF* = ...

8. Diketahui sebuah bak berbentuk balok yang terisi penuh dengan air. Bak tersebut akan dikosongkan dengan menggunakan pompa yang mampu menyedot air 0,7 liter per detik. Dalam waktu 30 menit bak dapat dikosongkan tanpa sisa. Jika luas alas bak adalah 10500 cm^2, maka tinggi bak tersebut adalah ...

9. Hasil operasi terbesar yang dapat diperoleh dari penempatan angka-angka 4, 6, 7, dan 8 pada kotak kotak yang tersusun seperti di bawah ini adalah ...

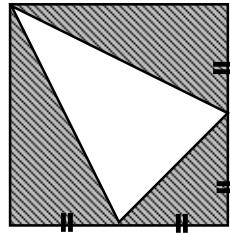
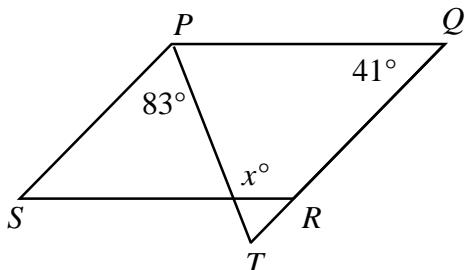
10. Pada sebuah peta dengan skala 1 : 100.000, luas tanah sebuah sekolah adalah 50 cm^2. Luas tanah sekolah tersebut pada peta dengan skala 1 : 200.000 adalah ...

SELEKSI TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2004

BAGIAN A: SOAL PILIHAN GANDA

1. $\sqrt{5050^2 - 4950^2} = ...$

   a. 10
   b. 100
   c. 1000
   d. 10000
   e. 100000

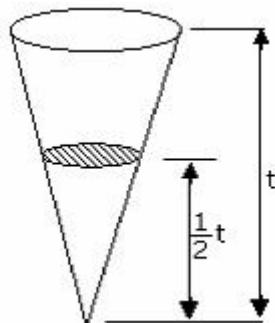
2. Persegipanjang besar berukuran 9 cm × 5 cm. Daerah yang diarsir adalah satu-satunya bangun di dalam persegipanjang yang bukan persegi. Berapakah luas daerah yang diarsir.

   a. 1,5 cm^2
   b. 2 cm^2
   c. 3 cm^2
   d. 3,5 cm^2
   e. 4 cm^2

3. Jika $a = \sqrt{\frac{b}{1-b}}$, maka b dinyatakan dalam a adalah ...

   a. $b = 1 + a^2$

   b. $b = \frac{1+a^2}{a^2}$

   c. $b = \frac{a^2}{1+a^2}$

   d. $b = \frac{1-a^2}{a^2}$

   e. $b = \frac{a^2}{1-a^2}$

4. Bilangan segitiga adalah bilangan yang berbentuk $\frac{n(n+1)}{2}$, dengan n adalah bilangan asli. Banyaknya bilangan segitiga yang kurang dari 100 adalah ...

   a. 8 b. 9 c. 10 d. 13 e. 15

5. Jolo mengalikan tiga bilangan prima berbeda sekaligus. Ada berapa faktor berbeda dari bilangan yang dihasilkan.

   a. 3 b. 4 c. 5 d. 6 e. 8

6. Persegi pada gambar di samping memiliki luas satu satuan luas. Pecahan yang menyatakan luas dari daerah yang tidak diarsir adalah ...

   a. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{3}{5}$ e. $\frac{3}{8}$

   b. $\frac{2}{5}$ d. $\frac{3}{7}$

7. Pecahan $\frac{s}{t}$ adalah pecahan sejati jika $s < t$ dan faktor persekutuan terbesarnya adalah 1. Jika t memiliki nilai mulai dari 2 sampai dengan 9 dan s bilangan positif, maka banyaknya pecahan sejati berbeda yang dapat dibuat adalah ...

   a. 26 c. 28 e. 36

   b. 27 d. 30

8. 3% dai 81 sama dengan 9% dari ...

   a. 27 c. 72 e. 243

   b. 54 d. 90

9. Jumlah 101 bilangan bulat berurutan adalah 101. Berapakah bilangan bulat yang terbesar di dalam barisan tersebut.

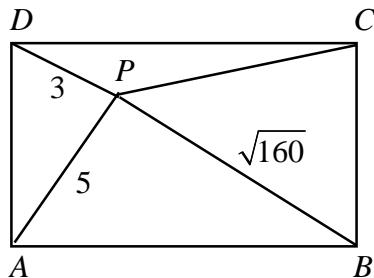
   a. 51 c. 100 e. 150

   b. 56 d. 101

10. Dengan menggunakan uang koin Rp.50,00, Rp.100,00, dan Rp.200,00, ada berapa carakah kita menyatakan uang sebesar Rp. 2000,00.

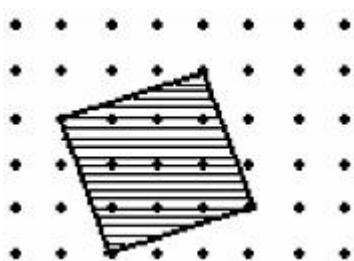
    a. 20 b. 65 c. 95 d. 106 e. 121

BAGIAN B: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Pada gambar berikut, garis *PQ* dan garis *RS* sejajar, demikian juga garis *PS* dan *QT* sejajar. Nilai x sama dengan ...

2. Alex selalu berbohong pada hari-hari Kamis, Jumat, dan Sabtu. Pada hari hari lain Alex selalu jujur. Di lain pihak Frans selalu berbohong pada hari-hari Minggu, Senin, dan Selasa, dan selalu jujur pada hari-hari lain. Pada suatu hari keduanya berkata: " Kemarin Saya berbohong". Hari mereka mengucapkan perkataan tersebut adalah hari ...

3. Semua n sehingga n dan $\frac{n+3}{n-1}$ merupakan bilangan bulat adalah ...

4. Misalkan N = $\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...+\frac{11}{10^{11}}$. Dalam bentuk desimal nilai N adalah ...

5. Sebuah tempat air berbentuk kerucut. Untuk mengisi tempat itu dengan air sampai pada ketinggian $\frac{1}{2}t$ diperlukan air sebanyak 38,5 liter. Volum air yang diperlukan untuk memenuhi tempat tersebut adalah ... liter

6. 2^{13} jika dibagi dengan 13 akan memberikan sisa ...

7. Tujuh ekor kambing menghabiskan rumput seluas 7 kali ukuran lapangan sepak bola dalam waktu 7 hari. Waktu yang diperlukan oleh 3 ekor kambing untuk menghabiskan rumput seluas 3 kali ukuran lapangan sepak bola adalah ... hari

8. Rata-rata sembilan bilangan adalah 6. Satu diantara kesembilan bilangan dibuang. Rata-rata delapan bilangan yang tinggal adalah $6\frac{1}{2}$. Bilangan yang dibuang adalah ...

9. Jumlah semua angka pada bilangan $2^{2004} \cdot 5^{2003}$ adalah ...

10. Perhatikan gambar berikut. Panjang *CP* adalah ...

SELEKSI TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2005

BAGIAN A: SOAL PILIHAN GANDA

1. $\sqrt{\dfrac{0,036}{0,9}} = \ldots$

   a. 0,002 c. 0,2 e. 20

   b. 0,02 d. 2

2. Diantara bilangan-bilangan berikut, manakah yang terletak diantara $\frac{11}{15}$ dan $\frac{13}{18}$?

   a. $\frac{12}{15}$ b. $\frac{13}{15}$ c. $\frac{15}{18}$ d. $\frac{11}{13}$ e. $\frac{24}{33}$

3. Perhatikan 3 barisan enam bilangan berikut.

   1) 8, 16, 32, 64, 128, dan 256

   2) 7, 11, 16, 22, 29, dan 37

   3) 2, 9, 2, 16, 2, dan 25

   Manakah dari 3 barisan tersebut yang mungkin menjadi 6 suku berikutnya dari suatu barisan bilangan yang tiga suku pertamanya adalah 1, 2, dan 4.

   a. (1) c. (3) e. semua

   b. (2) d. (1) dan (2)

4. Perhatikan gambar berikut;

Jika jarak terdekat titik-titik tersebut secara vertikal maupun horisontal adalah 2 satuan, maka luas daerah persegi pada gambar adalah ... satuan

a. 10 c. 20 e. 50

b. 40 d. 30

5. Uang sebesar Rp 2000,00 dapat dinyatakan dengan beberapa koin 50 rupiahan, 100 rupiahan, 200 rupiahan, dan/atau 500 rupiahan. Diketahui ternyata bahwa uang tersebut terdiri tepat dua koin 500 rupiahan,dan dua jenis koin lainnya. Dengan mengikuti aturan tersebut, banyak cara yang mungkin untuk menyatakan uang sebesar Rp 2000,00 dengan koin-koin tersebut adalah ...

a. 17 c. 18 e. 15

b. 20 d. 6

6. Sekumpulan data terdiri dari 5 bilangan asli memiliki rata-rata hitung 8 dan rentang (selisih terbesar dan terkecil) 12. Bilangan asli terkecil yang tidak mungkin menjadi anggota dari kumpulan tersebut adalah ...

a. 1 c. 18 e. 15

b. 20 d. 6

7. Bilangan 43 dapat dinyatakan ke dalam bentuk $5a + 11b$ karena untuk $a = 13$ dan $b = -2$, nilai dari $5a + 11b$ adalah 43. Manakah dari tiga bilangan 37, 254, dan 1986 yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $5a + 11b$.

a. 1983 c. 254 dan 1986 e. Tak ada

b. 254 d. Semua

8. Tiga ekor ayam (Besar, Sedang, dan Kecil) ditimbang. Jika yang besar dan kecil ditimbang, beratnya adalah 2,6 kg. Jika yang besar dan sedang ditimbang, beratnya 3 kg, dan jika yang sedang dan kecil ditimbang, beratnya 2 kg. Berat ketiga ayam tersebut seluruhnya adalah ...

a. 4 kg c. 3,8 kg e. 5 kg

b. 4,2 kg d. 4,6 kg

9. Salah satu faktor dari $17^3 - 5^3$ adalah ...

a. 5 b. 13 c. 399 d. 17 e. 273

10. Bilangan yang ditunjukkan oleh $\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}$ adalah ...

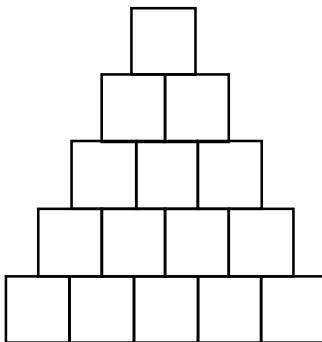
    a. Bilangan irasional positif

    b. Bilangan bulat negatif

    c. Bilangan bulat positif

    d. Bilangan rasional tidak bulat

    e. Bilangan irrasional negatif

BAGIAN B: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Sepuluh pasang suami istri mengikuti suatu pesta. Mereka kemudian saling berjabat tangan satu sama lain. Namun demikian, setiap pasang suami istri tidak pernah berjabatan tangan, maka banyaknya jabatan tangan yang terjadi adalah ...

2. Misalkan a dan b menyatakan luas daerah yang diarsir pada gambar dibawah. Kelima lingkaran kecil berjari-jari r. Titik-titik pusat empat lingkaran kecil yang menyinggung lingkaran besar merupakan titik-titik sudut persegi. Jika a sama dengan 10 cm^2, maka b =

3. Persegi $ABCD$ dengan panjang sisi satu satuan panjang. Misalkan P suatu titik di dalam sehingga ukuran sudut APB 120°. Jumlah luas daerah segitiga APB dan segitiga CPD adalah ...

4. Untuk bilangan real a dan b didefinisikan operasi* dengan aturan sebagai berikut:

$a*b = (a \times b) + (a + b)$ dimana simbol $\times$ dan + berturut-turut artinya perkalian dan penjumlahan bilangan biasanya. Tentukan nilai a yang memenuhi ketentuan $a*a = 3$.

5. H adalah himpunan semua bilangan asli n sedemikian sehingga bentuk $\frac{n-1}{n-3}$ menghasilkan bilangan bulat kurang dari 1, maka banyaknya himpunan bagian tak kosong dari H adalah ...

6. Dalam satu tahun harga suatu mobil berkurang 10% dari harga tahun sebelumnya. Paling sedikit berapa tahun sehingga harga mobil itu kurang dari setengah harga semula.

7. Setiap kotak Piramid disamping akan diisi dengan bilangan. Mula-mula yang harus diisikan adalah kotak-kotak pada alas piramid. Kotak di atasnya diperoleh dari menjumlahkan bilangan-bilangan yang ada di dalam dua kotak di bawahnya. Andaikan dasar piramid hendak diisi bilangan-bilangan 7, 12, 5, 4, dan 9, berapakah nilai terbesar yang mungkin dari bilangan pada kotak teratas.

8. Bentuk sederhana dari $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+...+\frac{1}{2005(2005+1)}$ adalah ...

9. Sebuah balok memiliki sisi-sisi yang luasnya 24 cm^2, 32 cm^2, dan 48 cm^2. Berapakah jumlah panjang semua rusuk balok tersebut.

10. Pompa air merek Tangguh sanggup memompa sebanyak 25 liter setiap menit. Pompa merek Perkasa sanggup memompa air 400 cc setiap detik, sedangkan merek Tahan Banting sanggup memompa 1,6 m^3 setiap jam. Pompa manakah yang paling cepat mengisi sebuah tangki air berkapasitas 500 liter.

SELEKSI TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2006

BAGIAN A: SOAL PILIHAN GANDA

1. Jumlah dua bilangan bulat yang berbeda adalah 14. Jika hasil bagi kedua bilangan tersebut adalah juga bilangan bulat, maka salah satu bilangan yang mungkin adalah ...

   a. 2 c. 6 e. 9

   b. 4 d. 7

2. Jika $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{x}$, maka $\sqrt{x}$ = ...

   a. 4

   b. 4 dan –4

   c. 2

   d. 2 dan –2

   e. Tidak ada jawaban yang benar

3. Pada suatu peta tertulis perbandingan 1:200.000. Jika jarak antara dua kota adalah 50 km, maka jarak kedua kota itu dalam peta adalah ...

   a. 0,25 cm c. 25 cm e. 10 cm

   b. 2,5 cm d. 1 cm

4. Ali, Ani, dan Budi pergi ke suatu toko untuk membeli pensil dan buku yang sama. Ali membeli dua pensil dan dua buku, Ani membeli tiga pensil dan 4 buku, sedangkan Budi membeli satu pensil dan dua buku. Jika Ali dan Ani berturut-turut membayar Rp 2.500,- dan Rp 4.500,-, maka Budi harus membayar ...

   a. Rp 1000,-

   b. Rp 1500,-

   c. Rp 2000,-

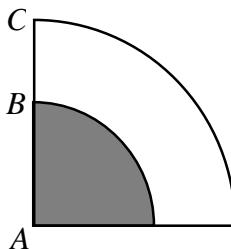
   d. Rp 2500,-

   e. Rp 3000,-

5. Diberikan kerucut dengan volume 77 cm^3. Jika tinggi kerucut itu 6 cm, maka jari-jari alasnya adalah ... $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

   a. 2 cm
   b. 3,5 cm
   c. 7 cm
   d. 10,3 cm
   e. 12,25 cm

6. Jika panjang diagonal suatu persegi adalah 4 cm, maka luas persegi itu (dalam cm^2) adalah ...

   a. 2
   b. 4
   c. 6
   d. 8
   e. 16

7. Bilangan asli n sedemikian sehingga hasil kali

   $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)$ merupakan bilangan bulat adalah ...

   a. n ganjil
   b. n genap
   c. n kelipatan 3
   d. n sebarang
   e. Tidak ada n yang memenuhi

8. Selisih terbesar dari 2 bilangan rasional x yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{1}{5} < 2x < \frac{1}{2}$ adalah ...

   a. $\frac{1}{20}$
   b. $\frac{1}{10}$
   c. $\frac{1}{8}$
   d. $\frac{1}{80}$
   e. Jawaban A, B, C, dan D salah

9. Misalkan A = {1,2,3} dan B = {a,b,c}. Banyaknya korespondensi satu-satu yang dapat dibuat dari A ke B adalah ...

   a. 1
   b. 3
   c. 6
   d. 9
   e. 27

10. Seorang Ayah berumur 39 tahun mempunyai dua orang anak bernama Budi dan Wati. Tahun depan, selisih umur Ayah dan Budi dibandingkan dengan selisih umur Ayah dan Wati adalah 14 : 19. Jika umur Ayah sekarang adalah tiga kali umur Budi ditambah enam kali umur Wati, maka jumlah umur Budi dan Wati tiga tahun yang akan datang adalah ...

    a. 17
    b. 18
    c. 19
    d. 20
    e. 21

11. Suatu garis lurus memotong sumbu X di titik $A(a,0)$ dan memotong sumbu Y di titik $B(0,b)$ dengan a dan b adalah bilangan bulat. Jika luas segitiga OAB adalah 12 satuan luas, maka banyaknya pasangan bilangan bulat a dan b yang mungkin adalah ...

    a. 4 pasang
    b. 8 pasang
    c. 16 pasang
    d. 32 pasang
    e. 48 pasang

12. Misalkan a, b, dan c adalah panjang sisi-sisi suatu segitiga, dengan a, b, dan c berupa bilangan asli berurutan yang rata-rata hitungnya 6. Jika ditarik garis tinggi terhadap sisi yang panjangnya b, maka panjang garis tinggi tersebut adalah ...

    a. $6\sqrt{6}$
    b. $4\sqrt{6}$
    c. $2\sqrt{6}$
    d. $4\sqrt{2}$
    e. $2\sqrt{2}$

13. Pada segitiga PQR, S adalah titik tengah QP dan T titik tengah QR. Perbandingan antara TS dan QR adalah ...

    a. 1 : 2
    b. 1 : 3
    c. 2 : 3
    d. 3 : 4
    e. 3 : 5

14. Luas daerah yang diarsir setengah dari luas daerah yang tidak diarsir. Panjang AB dibagi panjang AC adalah ...

a. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
b. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
c. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
d. $\frac{1}{7}\sqrt{7}$
e. $\frac{1}{7}\sqrt{5}$

15. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat dan $0 < m < n$. Jika $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{3}$, maka $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=$ ..

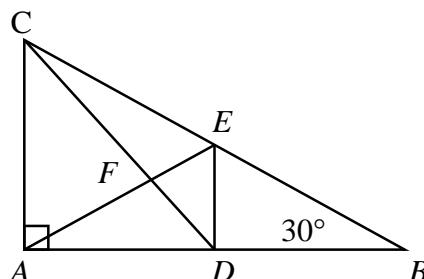
a. $\frac{2}{3}$
b. $\frac{1}{6}$
c. $-\frac{1}{6}$
d. $-\frac{2}{3}$
e. $\frac{5}{6}$

16. Banyaknya bilangan bulat dari –1006 sampai dengan 2006 yang merupakan kelipatan 3 tetapi bukan kelipatan 6 adalah ...

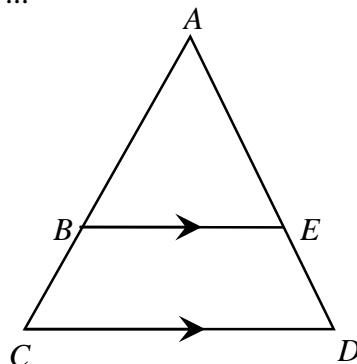
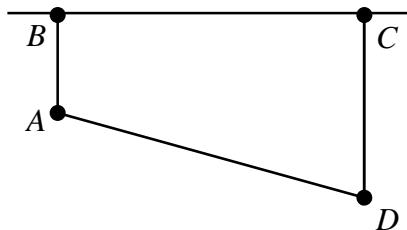
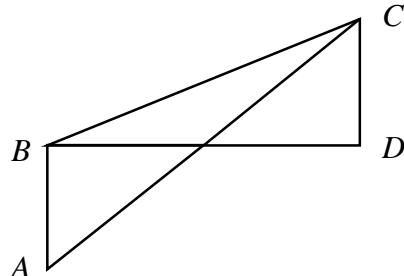
a. 500 bilangan
b. 501 bilangan
c. 502 bilangan
d. 503 bilangan
e. 504 bilangan

17. Bentuk sederhana dari $(y + x)\{(x - y)[x(x - y) + y(y + x)]\}$ adalah ...

a. $x^4 + y^4$
b. $x^4 - y^4$
c. $y^4 - x^4$
d. $(x^4 + y^4)$
e. Jawaban A, B, C, dan D tidak ada yang benar

18. Jika $5 \leq x \leq 10$ dan $2 \leq y \leq 6$, maka nilai minimum untuk $(x - y)(x + y)$ adalah ...

    a. –21 b. –12 c. –11 d. 11 e. 12

19. Perhatikan gambar di bawah ini. Jika $CE = EB$, $AD = DB$, besar $\angle ABC = 30°$, dan panjang $CA = 4$ cm, maka panjang CF adalah ...

    a. $\frac{4}{3}\sqrt{28}$
    b. $\frac{1}{3}\sqrt{28}$
    c. $\frac{2}{3}\sqrt{7}$
    d. $\frac{4}{3}\sqrt{7}$
    e. $\frac{1}{3}\sqrt{7}$

20. Perhatikan gambar di bawah ini. Jika luas $BCDE$ = luas ABE, dan panjang $CD = \sqrt{8}$, maka panjang BE = ...

    a. 4
    b. 2
    c. $\sqrt{2}$
    d. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
    e. Jawaban A, B, C, dan D tidak ada yang benar

BAGIAN B: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Jika jumlah dua bilangan adalah 3 dan selisih kuadrat bilangan itu adalah 6, maka hasil kali kedua bilangan itu adalah ...

2. Panjang jalan tol Bogor-Jakarta 60 km. Pada pukul 12.00 mobil A berangkat dari pintu tol Bogor menuju Jakarta dengan kecepatan rata-rata 80 km/jam. Pada saat yang sama mobil B berangkat dari pintu tol Jakarta menuju Bogor dengan kecepatan rata-rata 70 km/jam. Kedua mobil tersebut akan berpapasan pada pukul ...

3. Jika pada segi-n beraturan besar sudut-sudutnya 135°, maka n = ...

4. Semua bilangan bulat x sehingga $\frac{1}{2+\sqrt{x}}+\frac{1}{2-\sqrt{x}}$ merupakan bilangan bulat adalah ...

5. Bilangan asli n terbesar sehingga jumlah $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$ lebih kecil 2006 adalah ...

6. Semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi $x^2 + y^2 = 2x - 4y - 5$ adalah ...

7. Perhatikan gambar di samping. Jika panjang AB = 2 cm, panjang CD = 3 cm, dan panjang AC = 9 cm, maka panjang BC adalah ...

8. Banyaknya faktor dari 4200 yang merupakan bilangan ganjil positif adalah ...

9. $\frac{2006}{1.2}+\frac{2006}{2.3}+\frac{2006}{3.4}+...+\frac{2006}{2005.2006}=...$

10. Perhatikan gambar di bawah ini. Jika panjang AB = 3 cm, panjang AD = 8 cm, panjang CD = 5 cm, dan titik E terletak pada ruas garis BC, maka panjang minimal dari $AE + ED$ adalah ...

SELEKSI TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2007

BAGIAN A: SOAL PILIHAN GANDA

1. Urutan Bilangan-bilangan 2^{5555}, 5^{2222}, dan 3^{3333} dari yang terkecil sampai yang terbesar adalah ...

   a. 2^{5555}, 5^{2222}, dan 3^{3333}

   b. 5^{2222}, 3^{3333}, dan 2^{5555}

   c. 3^{3333}, 2^{5555}, dan 5^{2222}

   d. 5^{2222}, 2^{5555}, dan 3^{3333}

   e. 3^{3333}, 5^{2222}, dan 2^{5555}

2. Misalkan a, b, dan c bilangan bulat. Pernyataan-pernyataan berikut yang salah adalah ...

   a. Jika a membagi b dan b membagi c, maka a membagi c

   b. Jika a membagi b dan c, maka a membagi $b + c$

   c. Jika a membagi b dan c, maka a membagi bc

   d. Jika a membagi c dan b membagi c, maka ab membagi c

   e. Jika a membagi b, maka a membagi bc

3. Misalkan untuk bilangan bulat a dan b didefinisikan $a * b = \frac{a+b}{2}$, untuk semua bilangan bulat a, b, dan c.

   I. $a*b = b*a$

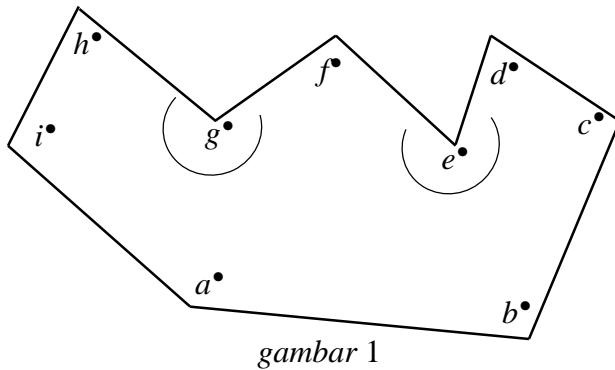
   II. $a*a = a$

   III. $a*(b*c) = (a*b)*c$

   Pernyataan yang benar adalah ...

   a. I saja

   b. II saja

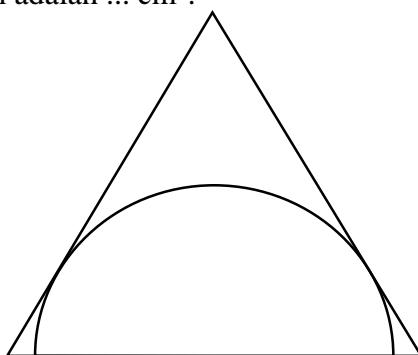
   c. III saja

d. I dan II saja

e. I, II, dan III untuk semua bilangan bulat a

4. Bilangan cacah lima digit dengan digit pertama tidak nol dan jumlah semua digitnya sama dengan 2 ada sebanyak ...

a. 1 b. 2 c. 3 d. 4 e. 5

5. Perhatikan gambar 1.

gambar 1

Nilai dari $a + b + c + d + e + f + g + h + i$ adalah ...

a. 360 c. 720 e. 1.260

b. 540 d. 900

6. Suatu bilangan kuadrat jika dibagi 3, maka kemungkinan sisanya adalah ...

a. 0 c. 2 e. 0, 1, atau 2

b. 1 d. 0 atau 1

7. Seorang pedagang membeli 25 kg beras jenis A seharga Rp.6.000,00 setiap kg dan 15 kg beras jenis B seharga Rp.4.000.00 setiap kg. Kedua jenis beras tersebut dicampur. Agar mendapat untung 4% setiap kg beras tersebut dijual seharga Rp. ...

a. 5.200,00

b. 5.460,00

c. 5.520,00

d. 5.580,00

e. 6.240,00

8. Jika f fungsi dari himpunan bilangan asli ke himpunan bilangan asli yang memenuhi $f(x) + f(x + 1) = 2x^2$ dan $f(31) = 99$, maka $f(99) = ...$

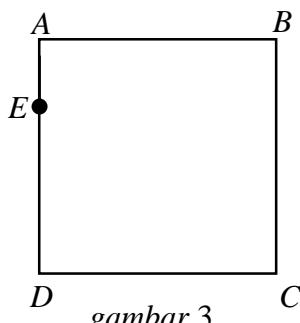
   a. 8.673

   b. 8.772

   c. 8.871

   d. 9.505

   e. 9.604

9. Diketahui suatu segitiga samasisi dan setengah lingkaran seperti gambar 2. Jika panjang sisi segitiga tersebut 14 cm, maka luas daerah di dalam segitiga dan di luar setengah lingkaran adalah ... cm^2.

   a. $49\sqrt{3} - 14\pi$

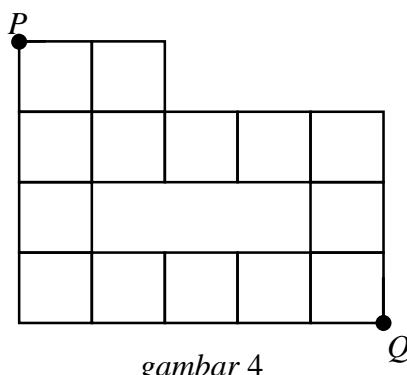
   b. $49\sqrt{3} - 24\frac{1}{2}\pi$

   c. $49\sqrt{3} - 18\frac{3}{8}\pi$

   d. $98\sqrt{3} - 36\frac{3}{4}\pi$

   e. $98\sqrt{3} - 24\frac{1}{2}\pi$

gambar 2

10. Suatu lapangan rumput berbentuk persegi *ABCD* seperti gambar 3 dengan panjang *AB* = 7 cm. Seekor kambing diikat di *E* dengan tali sepanjang 4 m. Jarak *AE* = 2 m. Luas daerah rumput yang dapat dimakan kambing tersebut adalah ... m^2.

    a. $2\sqrt{3} + \frac{16\pi}{3}$

    b. $2\sqrt{3} + 4\pi$

    c. $2\sqrt{2} + \frac{16\pi}{3}$

    d. $4 + 4\pi$

    e. $8 + 4\pi$

gambar 3

11. Banyak jalan terpendek dari P ke Q adalah ...

gambar 4

a. 4

b. 16

c. 22

d. 60

e. 80

12. Pada pukul 10.15 penerjun payung melompat dari pesawat udara sambil membuka parasutnya. Setelah 3 detik, ketinggiannya 200 meter dari permukaan tanah. Lima detik kemudian ketinggiannya 1900 meter. Misalkan mulai detik ke-8 sampai satu menit kecepatannya tetap. Ketinggiannya pada pukul 10.16 adalah ... meter.

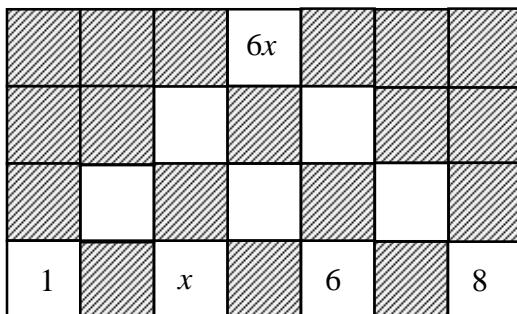
a. 860
b. 890
c. 940
d. 960
e. 980

13. Desi merayakan hari ulang tahun pada tanggal 27 Desember 2006. Jika pada hari tersebut usia Desi sama dengan jumlah digit dari angka tahun kelahirannya, maka Desi lahir pada tahun ...

a. 1994
b. 1992
c. 1989
d. 1984
e. 1979

14. Suatu barisan hanya terdiri dari bilangan 1, 2, 3, 4, dan 5. Jika barisan tersebut adalah 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, ... maka suku ke 100 dari barisan tersebut adalah ...

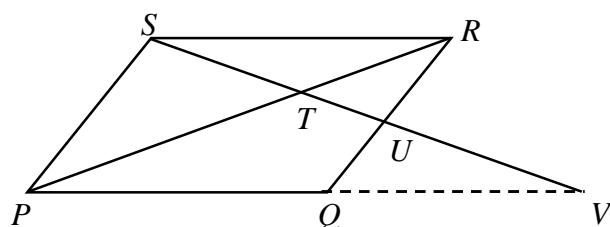
a. 1
b. 2
c. 3
d. 4
e. 5

15. Konstanta dari $\left(3x^3 - \frac{2}{x}\right)^8$ adalah ...

a. 14.328
b. 15.552
c. 16.112
d. 16.128
e. 17.128

16. Banyak bilangan asli yang kurang dari 10.000 dengan jumlah digit pertama dan digit terakhirnya sama dengan 11 adalah ...

    a. 999   c. 800   e. 400

    b. 888   d. 444

17. Perhatikan gambar 5. Jika bilangan pada daerah persegi tidak diarsir diperoleh dengan menjumlahkan dua bilangan pada persegi tidak diarsir di bawah dan terhubung dengannya, maka nilai x adalah ...

    a. 1

    b. 6

    c. 9

    d. 27

    e. 54

gambar 5

18. Perhatikan gambar 6. Diketahui *PQRS* adalah jajar genjang dan misalkan garis *SU* memotong diagonal *PR* di titik *T*, memotong ruas garis *QR* di titik *U*, dan memotong garis *PQ* di titik *V*. Jika panjang ruas garis *ST* 16 cm dan panjang ruas garis *TU* 8 cm, maka panjang ruas garis *UV* adalah ... cm.

    a. 12

    b. 18

    c. 20

    d. 22

    e. 24

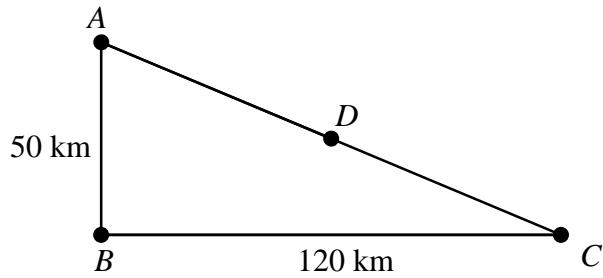
gambar 6

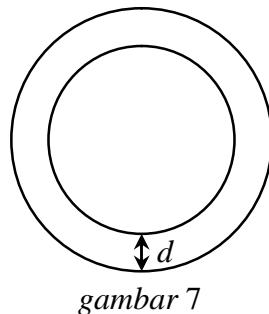
19. Dua mata uang dilempar empat kali berturut-turut. Peluang muncul angka pertama kali pada pelemparan keempat adalah ...

    a. $\frac{1}{4^4}$ c. $\frac{3}{4^4}$ e. $\frac{1}{4}$

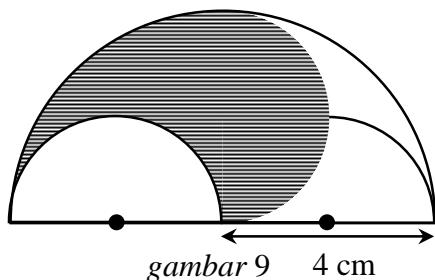
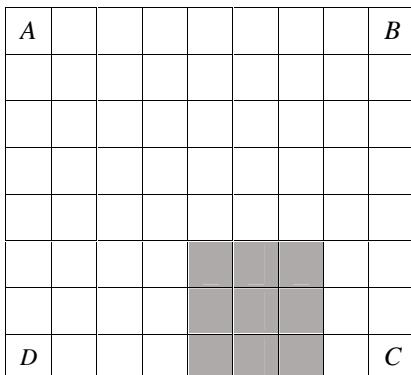
    b. $\frac{2}{4^4}$ d. $\frac{1}{4^2}$

20. Untuk meningkatkan penjualan, suatu perusahaan memberikan hadiah yang dimuat dalam setiap kotak susu yang dijual satu dari empat seri buku secara acak. Jika Ghina membeli empat kotak susu, maka peluang Ghina mendapatkan semua seri buku hadiah adalah ...

    a. $\frac{1}{256}$
    b. $\frac{3}{256}$
    c. $\frac{3}{32}$
    d. $\frac{1}{4}$
    e. 1

BAGIAN B: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Jika bilangan 123.456.789 dikalikan dengan bilangan 999.999.999, maka banyak angka 9 dari hasil perkalian kedua bilangan tersebut adalah ...

2. Kota *A* terletak 50 km di sebelah utara kota *B*, dan kota *C* terletak 120 km di sebelah timur kota *B*, dan kota *D* terletak di tengah antara kota *A* dan *C*. Jarak kota *D* dari kota *A* adalah ...

3. Perhatikan dua lingkaran konsentrik (memiliki titik pusat sama) seperti gambar 7.

   Jika keliling lingkaran besar lebih panjang 4 meter dari keliling lingkaran kecil, maka jarak *d* adalah ... meter.

gambar 7

4. Perhatikan gambar 8. Jika pada setiap persegi ditempatkan bilangan bulat positip sedemikian rupa sehingga perkalian bilangan-bilangan dari sembarang lima persegi yang berurutan menghasilkan 360, maka jumlah bilangan pada semua persegi tersebut adalah

4				3				5								2

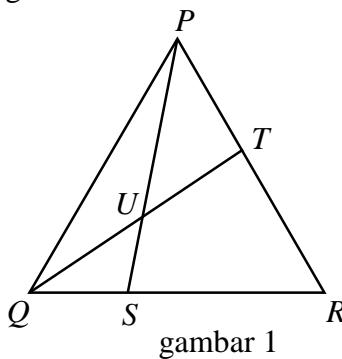
5. Perhatikan gambar 9. Luas daerah yang diarsir adalah ... cm^2.

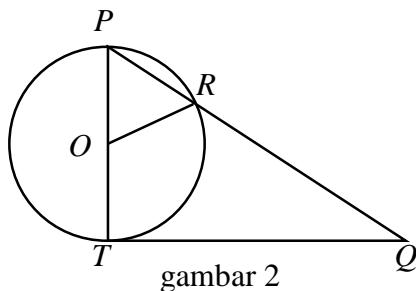
gambar 9

6. Jika H adalah himpunan semua pembagi positif dari 2007, maka banyak himpunan bagian dari H yang tidak kosong adalah ...

7. Suatu pabrik pembuat tas memiliki pekerja laki-laki sama banyak dengan pekerja wanita.Kecepatan kerja pekerja laki-laki dan wanita sama. Dalam waktu 6 hari, 6 pekerja laki-laki dan 8 pekerja wanita dapat menghasilkan 4.200 tas. Jika dalam waktu tujuh hari seluruh pekerja pabrik dapat menghasilkan 5.600 tas, maka pekerja laki-laki pada pabrik tersebut ada sebanyak ... orang.

8. Himpunan semua bilangan prima yang kurang dari seratus dan kuadrat bilangan tersebut ditambah dua juga merupakan bilangan prima adalah ….

9. Perhatikan gambar 10. Banyak persegi yang terletak pada daerah persegi *ABCD* berukuran 9×9 dan paling sedikit satu sisinya terletak pada persegi *ABCD* adalah ...

(Salah satu daerah persegi yang dimaksud adalah daerah yang diarsir)

10. Di laboratorium Matematika terdapat 6 batang kayu sejenis yang panjangnya berturut-turut 4 dm,4 dm, 10, dm, 22 dm, dan 37 dm. Jika keenam batang kayu tersebut harus digunakan untuk membuat trapesium samakaki, maka banyak trapesium samakaki yang dapat dibentuk adalah ...

SELEKSI TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2008

BAGIAN A: SOAL PILIHAN GANDA

1. Jika P, Q, R adalah angka-angka dari suatu bilangan dan $(100P + 10Q + R)(P + Q + R) = 2008$, maka nilai Q adalah ...

   a. 3 c. 5 e. 7

   b. 4 d. 6

2. $\left(\sqrt{3}\right)^{-3} + \left(\sqrt{3}\right)^{-2} + \left(\sqrt{3}\right)^{-1} + \left(\sqrt{3}\right)^{0} + \left(\sqrt{3}\right)^{1} + \left(\sqrt{3}\right)^{2} + \left(\sqrt{3}\right)^{3} = \ldots$

   a. 1

   b. $14\frac{5}{9}\sqrt{3}$

   c. $10\frac{1}{9} + 4\frac{4}{9}\sqrt{3}$

   d. $4\frac{1}{3} + 4\frac{4}{9}\sqrt{3}$

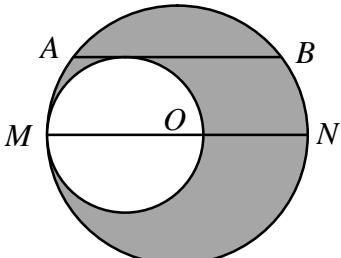
   e. $81\sqrt{3}$

3. Misalkan n adalah bilangan asli yang tidak lebih dari 24, maka jumlah dari semua nilai n yang memenuhi agar n dan 24 relatif prima adalah ...

   a. 120 c. 95 e. 81

   b. 96 d. 82

4. Perhatikan gambar 1.

gambar 1

Segitiga PQR merupakan segitiga sama sisi. Jika $\angle SPQ = 20°$ dan $\angle TQR = 35°$, maka $\angle SUT = ...$

a. 135° c. 125° e. 95°

b. 130° d. 105°

5. Jika rata-rata dari 15 bilangan asli berbeda adalah 12, maka bilangan asli terbesar yang mungkin adalah ...

a. 45 c. 89 e. 166

b. 75 d. 105

6. Jika $\frac{3^{11}-1}{2}$ dibagi 9, maka sisanya adalah ...

a. 2 c. 4 e. 8

b. 3 d. 6

7. Fachmy menghitung, mulai dari 1000, kemudian bertambah 8 menjadi 1008, 1016, 1024, 1032, ...Sedangkan Zeldy pada saat yang sama menghitung mulai dari 2008, berkurang 4 menjadi 2004,2000, 1996, 1992, ...Bilangan tepat sama saat mereka menghitung bersama-sama adalah ...

a. 1672 c. 1656 e. 1640

b. 1664

c. 1656

d. 1648

e. 1640

8. Jika $f(z) = az + b$, maka nilai dari $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ adalah ...

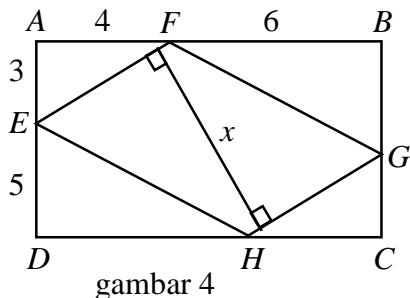
a. b c. a e. ab

b. b^2 d. a^2

9. Suatu bilangan terdiri dari 5 angka. Jika jumlah dari angka-angka tersebut adaiah A dan jumlah dari angka-angka pada bilangan A adalah B, maka nilai terbesar dari B yang mungkin adalah ...

a. 9 b. 10 c. 11 d. 12 e. 13

10. Perhatikan gambar 2.

gambar 2

Jika QT garis singgung lingkaran yang berpusat di O dan $\angle TOR = 112°$, maka besar $\angle PQT = ...$

a. 56° c. 34° e. 24°

b. 44° d. 26°

11. Jika $\dfrac{173}{61} = a + \dfrac{1}{b + \dfrac{1}{c + \dfrac{1}{d}}}$, maka $25a + 5b + 100c + 500d = ...$

a. 6325 c. 5555 e. 3475

b. 5635 d. 4545

12. Bapak dan ibu Zaenal sedang merencanakan nama bagi anak mereka yang akan segera lahir dengan nama yang terdiri dari 3 kata dengan nama belakang Zaenal. Mereka menginginkan inisial/singkatan nama anak tersebut adalah terurut menurut abjad dengan tak ada huruf yang berulang, sebagai contoh GTZ, tetapi mereka tidak mau TGZ. Banyak pilihan inisial nama yang dapat dipergunakan adalah ...

a. 25 c. 150 e. 600

b. 125 d. 300

13. Pada bulan Januari harga tas di Toko Rima adalah Rp 150.000,00. Pada bulan Februari harga tas naik 10%, tetapi bila yang membeli pelajar memperoleh potongan 10%. Pada bulan Maret potongan bagi pelajar tidak berlaku lagi, tetapi harga tas tersebut turun menjadi Rp 135.000,00 dan pembeli dibebani pajak pembelian sebasar 10%. Dua orang pelajar, Andi dan Anton membeli tas tersebut. Andi membeli pada bulan Februari, sedangkan Anton membeli pada bulan Maret. Pernyataan berikut yang benar adalah ...

a. Anton membayar sebesar Rp 150.000,00 untuk tas yang dibelinya.

b. Andi membayar sebesar Rp 150.000,00 untuk ias yang dibelinya.

c. Jumlah uang yang dibayarkan Andi sama dengan jumlah uang yang dibayarkan Anton.

d. Jumlah uang yang dibayarkan Andi lebih besar dari jumlah uang yang dibayarkan Anton.

e. Di antara tiga bulan yang disebut di atas, bulan Januari adalah bulan yang paling menguntungkan bagi pelajar untuk membeli tas.

14. Perhatikan dua lingkaran pada gambar 3. Diketahui panjang talibusur AB = 24 cm dan $MO = ON$

gambar 3

maka luas daerah yang diarsir adalah ...

a. 24π cm^2 c. 104π cm^2 e. 152π cm^2

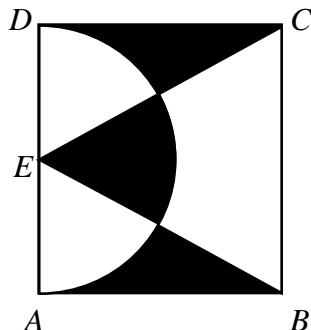
b. 72π cm^2 d. 144π cm^2

15. Huruf ke-2008 dari pola:

O,L,I,M,P,I,A,D,E,S,A,I,N,S,O,L,I,M,P,I,A,D,E,S,A,I,N,S, ...adalah ...

a. A b. D c. E d. I e. M

16. Seorang pedagang menjajakan 10 jeruk manis dan 5 jeruk masam yang kesemuanya terlihat sama dan diletakkan dalam satu keranjang yang sama. Jika Ana ingin membeli dua buah jeruk dan mengambilnya sekaligus secara sembarang, maka peluang Ana akan memperoleh dua jeruk dengan rasa yang sama adalah ...

a. $\frac{1}{21}$ b. $\frac{1}{105}$ c. $\frac{2}{15}$ b. $\frac{11}{15}$ e. $\frac{11}{21}$

17. Perhatikan gambar 4.

gambar 4

ABCD merupakan persegipanjang dan *EFGH* adalah jajarangenjang, maka panjang sisi x adalah ...

a. 6,8 d. 7,2 c. 7,6 d. 8,0 e. 8,1

18. Suatu deret aritmetika mempunyai suku pertama a dan beda 10. Jumlah n suku pertama adalah 10.000. Jika suku ke-n kurang dari 500, maka nilai n terbesar yang mungkin adalah ...

a. 73 b. 72 c. 71 d. 70 e. 69

19. Bilangan-bilangan 3, 4, dan 7 disubstitusikan sembarang dan boleh beralang untuk menggantikan konstanta-konstanta a, b, dan c pada persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$. Peluang persamaan kuadrat itu mempunyai akar-akar real adalah ...

a. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{1}{9}$ e. $\frac{1}{27}$

b. $\frac{1}{6}$ d. $\frac{1}{18}$

20. Perhatikan gambar 5.

Pada segiempat *ABCD* dibuat setengah lingkaran pada sisi *AD* dengan pusat *E* dan segitiga sama sisi *BEC*. Jika *BC* = 20 cm, maka luas daerah yang diarsir adalah ...

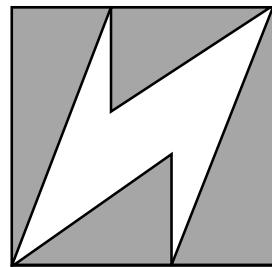
a. $\left(100\sqrt{3}-50\pi\right)\text{cm}^2$

b. $\left(100\sqrt{3}-\dfrac{50}{3}\pi\right)\text{cm}^2$

c. $\left(100\sqrt{3}-\dfrac{50}{6}\pi\right)\text{cm}^2$

d. $\left(100\sqrt{3}-\dfrac{100}{3}\pi\right)\text{cm}^2$

e. $\left(100\pi-100\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$

BAGIAN B: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Pada saat makan siang, Taufan menghabiskan $\frac{1}{3}$ dari uang yang ia miliki. Setelah makan siang, ia menerima uang dari temannya sebesar Rp. 25.000,00. Sore harinya, ia membeli tiket bioskop seharga Rp. 40.000,00 dan membeli makanan seharga Rp. 12.500,00. Sekarang uangnya tersisa Rp. 52.500,00, berapa uang Taufan sebelum makan siang?

2. Lima orang dalam satu keluarga dicatat nama dan umurnya, sebagaimana tampak pada tabel berikut:

Anggota Keluarga	Ayah	Ibu	Anak I	Anak II	Anak III
Umur (tahun)	40	36	8	6	2

   Rata-rata umur keluarga tersebut lima tahun yang lalu adalah ...

3. Garis *g* melalui titik (–2,3), memotong sumbu-*X* di titik *A*, dan memotong sumbu-*Y* di titik *B*. Jika jarak titik *O* dengan titik *A* sama dengan jarak titik *O* dengan titik *B*, maka persamaan garis *g* adalah ...

4. Intan berjalan kaki dengan kecepatan tetap 4,5 km/jam pada suatu jalur lurus ke arah Utara. Di kejauhan pada jarak 2,7 km dari arah Utara pada jalur yang sama, Mufti mengendarai sepeda dengan kecepatan lima kali lipat kecepatan Intan. Lama waktu yang diperlukan sehingga mereka akan kembali berjarak 2,7 km satu sama lain adalah ...

5. Misalkan banyak anggota himpunan A dan B berturut-turut ialah m dan n, dengan $m > n$. Banyak anggota himpunan $A \cup B$ paling sedikit adalah ...

6. Diberikan sebuah persegi dengan sisi a satuan, sebagaimana tampak pada Gambar 6. Empat buah segitiga siku-siku dipotong dari persegi tersebut seperti digambarkan sebagai daerah berarsir abu-abu. Diketahui semua sisi siku-siku yang lebih pendek memiliki panjang $\frac{3}{8}a$ satuan. Luas daerah tak berarsir pada persegi tersebut adalah ...

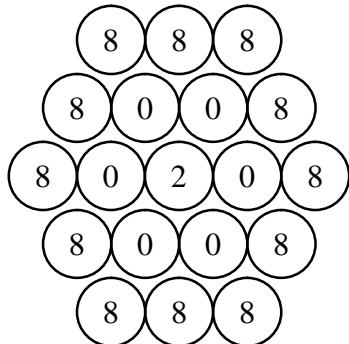
7. Anto memiliki sejumlah kubus kecil berwarna putih yang ia susun menjadi sebuah kubus yang lebih besar. Sedikitnya satu sisi kubus besar dicat dengan warna hijau, tetapi masih ada setidaknya satu sisi tetap berwarna putih. Kubus besar tersebut kemudian dibongkar kembali dan ditemukan bahwa ada 1000 buah kubus kecil yang tetap berwarna putih di semua sisinya. Banyak sisi kubus besar yang telah diwarnai hijau adalah ...

8. Diketahui z adalah bilangan asli yang memenuhi semua syarat berikut.

   a. z terdiri dari 5 angka.

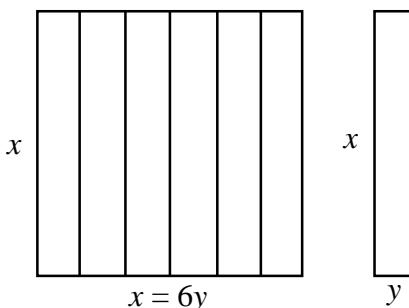
   b. Angka penyusun z tidak ada yang berulang.

   c. Penjumlahan semua angka penyusun z adalah 10.

   d. Jika z ditambah dengan bilangan cerminnya, maka akan diperoleh sebuah bilangan lima angka yang semua angkanya sama.

   Bilangan z terbesar yang mungkin adalah ...

   Keterangan: bilangan cermin adalah bilangan dengan angka penyusun yang sama tetapi memiliki urutan angka terbalik. Di samping itu, bilangan cermin dapat memiliki angka 0 pada posisi pertama, sedangkan bilangan semula tidak.

9. Suatu kerucut tegak tertutup yang berisi air dengan diameter alas d cm dan tinggi x cm. Tinggi air pada kerucut adalah $\frac{1}{2}x$ cm. Jika posisi kerucutnya dibalik, maka tinggi air pada kerucut tersebut adalah ...

10. Perhatikan gambar 7.

Dengan mulai dari angka 2 pada lingkaran ditengah, bilangan 2008 dapat dibentuk dari pergerakan satu lingkaran ke satu lingkaran lainnya jika lingkarannya saling bersinggungan.

Banyak cara untuk membentuk bilangan 2008 adalah ...

SELEKSI TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2009

BAGIAN A: SOAL PILIHAN GANDA

1. Jika a, b, 15, c, dan d membentuk barisan aritmetika, mka $a + b + c + d = ...$

   a. 45 b. 60 c. 75 d. 90

2. Misalkan $S = \{21, 22, 23, ... , 30\}$. Jika empat anggota S diambil secara acak, maka peluang terambilnya empat bilangan yang berjumlah genap adalah ...

   a. $\frac{2}{5}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{11}{21}$ d. $\frac{2}{3}$

3. Diketahui koordinat segiempat $ABCD$ adalah $A(0, 0)$, $B(30, 0)$, $C(0, 40)$, dan $D(30, 40)$. Titik E dan F masing-masing membagi sisi CD dan AC menjadi dua bagian sama panjang. Jika pada segitiga CEF dibuat lingkaran dalam maka koordinat titik pusat lingkaran adalah ...

   a. (5, 24)

   b. (35, 5)

   c. $(7\frac{1}{2}, 10)$

   d. $(10, 7\frac{1}{2})$

4. Berat seekor gajah pada awal tahun adalah 655,36 kg. Selama bulan Januari, berat gajah naik 25%. Karena debu dan efek meteorit yang menghalangi sinar matahari sepanjang Bulan Februari, berat gajah turun 25%. Kemudian sepanjang bulan Maret, sinar matahari kembali normal dan berat gajah kembali naik 25%. Pada bulan April, karena keracunan makanan, gajah terserang sakit perut yang menyebabkan beratnya kembali turun 25%. Keadaan seperti ini berlanjut hingga bulan-bulan berikutnya. Berat gajah pada akhir Juli adalah ... Kg.

   a. 675,00

   b. 625,00

   c. 600,00

   d. 540,00

5. Gambar di bawah ini menunjukkan suatu persegi yang dibagi menjadi 6 bagian yang sama.Setiap bagian berupa persegipanjang yang mempunyai keliling 70 cm. Luas persegi tersebut adalah ...

a. 625 cm^2

b. 784 cm^2

c. 900 cm^2

d. 961 cm^2

6. Pada bulan Januari harga tas di Toko Asia adalah Rp 150.000,00. Pada bulan Februari harga tas naik 10%, tetapi bila yang membeli pelajar memperoleh potongan 10%. Pada bulan Maret harga tas tersebut menjadi Rp 135.000,00 tetapi pembeli dibebani pajak pembelian sebasar 10% dan diskon bagi pelajar tidak berlaku lagi. Dua orang pelajar, Andi dan Anton membeli tas tersebut. Andi membeli pada bulan Februari, sedangkan Anton membeli pada bulan Maret. Pernyataan berikut yang benar adalah ....

a. Jumlah uang yang dibayarkan Andi sama dengan jumlah uang yang dibayarkan Anton.

b. Anton membayar sebesar Rp 150.000,00 untuk membayar tas yang dibelinya.

c. Di antara tiga bulan yang disebut di atas, bulan Januari adalah bulan yang paling menguntungkan bagi pelajar untuk membeli tas.

d. Jumlah uang yang dibayarkan Andi lebih besar dari jumlah uang yang dibayarkan Anton.

7. Pada hari Minggu, jumlah uang Tora dan Ani berbanding 3 : 1. Pada hari Senin, tora memberi uang sejumlah Rp. 50.000,00 kepada Ani. Sekarang perbandingan jumlah uang Tora dan Ani menjadi 1 : 2. Jumlah uang Tora dan uang ani pada hari Minggu adalah ….

a. Rp. 720.000,00
b. Rp. 600.000,00
c. Rp. 450.000,00
d. Rp. 400.000,00

8. Misalkan a dan b bilangan bulat sehingga $a(a + b) = 34$. Nilai terkecil $a - b$ adalah ...

a. –17
b. –32
c. –34
d. –67

9. $\sqrt{\frac{p}{q}\sqrt{\frac{q}{p}\sqrt{\frac{p}{q}\sqrt{\frac{q}{p}\ldots}}}} = p^{x}q^{-x}$ maka nilai x sama dengan ...

a. $\frac{31}{32}$
b. $\frac{3}{2}$
c. $\frac{1}{3}$
d. $\frac{5}{16}$

10. Andi membuka sebuah buku setebal 650 halaman, hasil kali nomor halaman yang nampak adalah 702. Jumlah nomor-nomor halaman buku yang terbuka adalah ...

a. Lebih dari 53
b. Kurang dari 50
c. Lebih dari 52
d. Kurang dari 54

11. Titik-titik (1, –1), (3, 4), (m, n), dan (11, –1) adalah titik-titik sudut suatu jajargenjang, m dan n bilangan bulat. Panjang diagonal terpendeknya adalah...

a. 10
b. $\sqrt{89}$
c. $\sqrt{29}$
d. 5

12. Tujuh orang tukang kayu dalam waktu 5 jam menghasilkan 6 papan tulis. Dalam waktu 1 jam papan tulis yang dihasilkan oleh seorang tukang kayu adalah ...

a. $\frac{1}{35}$
b. $\frac{1}{7}$
c. $\frac{6}{35}$
d. $\frac{2}{7}$

13. Edy berangkat ke sekolah pukul 6.00 setiap pagi. Bila bermobil dengan kecepatan 40 km/jam, dia tiba di sekolah terlambat 20 menit. Bila kecepatan 60 km/jam, dia tiba 15 menit lebih awal. Di sekolah Edy, pelajaran jam pertama dimulai pulul ...

a. 7.30
b. 7.25
c. 7.15
d. 7.00

14. Misalkan $a > 0$, $a \in$ R sehingga $3a^2 - 2a\sqrt{2} - 2 < 0$.

    Persamaan kuadrat $x^2 + ax\sqrt{3} + 3a^2 - 2 = 0$ memiliki dua akar real bila ...

    a. $0 < a < \sqrt{2}$

    b. $0 < a < \frac{2}{3}\sqrt{2}$

    c. $a < -\frac{2}{3}\sqrt{2}$ atau $a > \frac{2}{3}\sqrt{2}$

    d. $\frac{2}{3}\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$

15. Suatu percobaan dilakukan dengan ketentuan sebagai berikut :

    i. Pertama kali dilakukan pelemparan sekeping mata uang.

    ii. Jika dalam pelemparan mata uang muncul sisi gambar, percobaan dilanjutkan dengan pelemparan mata uang. Sedangkan jika muncul sisi angka, percobaan dilanjutkan dengan sebuah dadu bersisi enam.

    iii. Jika sampai dengan pelemparan mat uang ketiga kalinya selalu muncul gambar, percobaan dihentikan.

    iv. Jika dalam pelemparan dadu muncul angka genap, pelemparan dihentikan.

    v. Jika dalam pelemparan dadu muncul angka ganjil, pelemparan diulang sekali dn selanjutnya pelemparan dihentikan apapun angka yang muncul.

    Peluang bahwa dalam percobaan tersebut tidak pernah terjadi pelemparan dadu adalah ...

    a. 1

    b. $\frac{1}{2}$

    c. $\frac{1}{16}$

    d. $\frac{1}{64}$

16. suatu sekolah mengikutsertakan 3 siswa laki-laki dan 2 siswa perempuan dalam seleksi OSN tingkat Kabupaten/Kota. Diberikan 3 soal pilihan benar-salah. Peluang bahwa tidak ada satupun siswa laki-laki yang menjawab semua soal dengan benar, sedangkan ada satu siswa perempuan yang dapat menjawab semua soal dengan benar adalah ...

    a. $\frac{7^3}{8^3}$

    b. $\frac{15 \times 7^3}{8^5}$

    c. $\frac{14 \times 7^3}{8^5}$

    d. $\frac{7^3 + 14}{8^5}$

17. Untuk sembarang p bilangan prima, misalkan $h = 14p - 4$. Pernyataan berikut yang benar adalah

    a. h tidak dapat dinyatkan dalam bentuk kuadrat dari bilangan asli.

    b. h dapat dinyatakan dalam bentuk kuadrat dari bilangan asli.

    c. Ada bilangan asli n sehingga berlaku $14p - 4 = n^3$

    d. Terdapat n bilangan ganjil sehingga $14p - 4 = n^2$

18. Nilai x yang memenuhi persamaan $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{243}}\right)^{3x} = \left(\frac{3}{3^{x-2}}\right)^2 \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ adalah ...

    a. $-5\frac{1}{2}$

    b. $-1\frac{7}{9}$

    c. $1\frac{7}{9}$

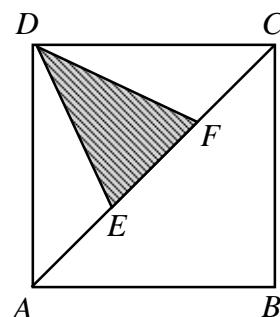
    d. $5\frac{1}{3}$

19. Rata-rata dari empat bilangan beruurtan adalah $2m - 1$, maka nilai dari empat kali bilangan terkecil adalah ...

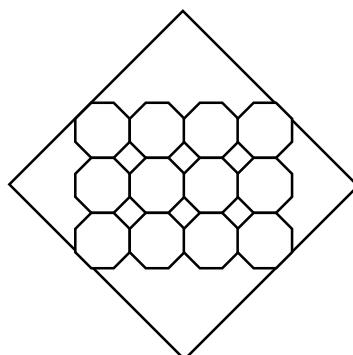
    a. $8m + 8$

    b. $8m + 3$

    c. $8m - 7$

    d. $8m - 10$

20. Pada pemilihan calon ketua kelas yang diikuti oleh 5 kontestan, diketahui bahwa pemenangnya mendapat 10 suara. Jika diketahui juga bahwa tidak ada dua kontestan yang memperoleh jumlah suara yang sama, maka perolehan terbesar yang mungkin untuk kontestan dengan suara paling sedikit adalah ...

    a. 3 b. 4 c. 5 d. 6

BAGIAN B: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Banyaknya bilangan genap yang kurang dari 1000 dan hasil kali angka-angka penyusun 180 adalah ...

2. Luas persegipanjang $ABCD$ adalah 112 satuan luas. Titik E dan F berada di diagonal AC seperti gambar di bawah ini sedemikian hingga $3(AE + FC) = 4EF$. Luas segitiga DEF adalah ... satuan.

3. Jika $f(n)$ menyatakan banyak faktor bilangan asli n, maka $f(f(f(2009))) = ...$

4. Rata-rata 15 bilangan adalah 0. Bila bilangan-bilangan v, w, x, y, dan z ditambahkan, maka rata-ratanya bertambah 5. rata-rata bilangan-bilangan yang ditambahkan adalah ...

5. Lantai suatu ruangan berbentuk persegi. Lantai tersebut akan dipasang keramik berbentuk persegi juga. Bila keramik yang terletak pada diagonalnya sebanyak 33, maka banyaknya keramik yang menutupi lantai adalah ...

6. Faisal memperoleh nomor antrean ke-2009 untuk menaiki bus antarkota dalam propinsi, dari kota malang ke Surabaya. Bus berangkat setiap 5 menit dan setiap pemberangkatan, bus memuat 55 orang. Jika pemberangkatan pertama berangkat pukul 5.01 pagi, maka Faisal berangkat pada pukul ...

7. Jumlah 2009 bilangan bulat berurutan samadengan 6027, maka selisih bilangan terkecil dan terbesar sama dengan ….

8. Jika nilai ulangan siswa kelas VIII terdiri dari bilangan genap beruurtan dengan nilai terendah 2 dan tertinggi 98, jangkauan interkuartil dari data tersebut adalah ...

9. Dua belas segidelapan beraturan dengan panjang sisi 2 cm. disusun dalam sebuah persegi seperti gambar berikut.

   Luas persegi tersebut samadengan ...

10. Jumlah semua bilangan riil x yang memenuhi persamaan berikut adalah ...

   $(5^x - 25)^3 + ((25)^x - 5)^3 = (5^x + (25)^x - 30)^3$

SELEKSI TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2010

BAGIAN A: SOAL PILIHAN GANDA

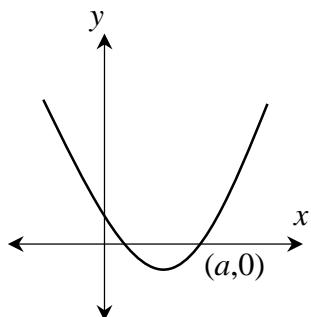
1. Garis l melalui titik (–4, –3) dan (3, 4). Jika garis l juga melalui titik (a, b), maka nilai $a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 3^2 = ...$

   a. 23 b. 1 c. –1 d. –28 e. –31

2. Jika bilangan ganjil dikelompokkan seperti berikut: {1}, {3,5}, {7,9,11}, {13,15,17,19}, maka suku tengah dari kelompok ke-11 adalah ...

   a. 21 c. 61 e. 121
   b. 31 d. 111

3. n adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga $7 + 30n$ bukan bilangan prima. Nilai dari $64 - 16n + n^2$ adalah ...

   a. 1 b. 4 c. 9 d. 16 e. 25

4. Dijual 100 lembar kupon, 2 diantaranya berhadiah. Ali membeli 2 lembar undian. Peluang Ali mendapat 2 hadiah adalah ...

   a. $\frac{1}{50}$ c. $\frac{1}{200}$ e. $\frac{1}{9900}$
   b. $\frac{1}{100}$ d. $\frac{1}{4950}$

5. Bilangan tiga digit $2A3$ jika ditambah dengan 326 akan menghasilkan bilangan tiga digit $5B9$. Jika $5B9$ habis dibagi 9, maka $A + B = ...$

   a. 5 b. 6 c. 7 d. 8 e. 9

6. Sebuah mata uang dan sebuah dadu dilantunkan bersama-sama. Bila diketahui mata uang muncul angka, maka peluang munculnya mata dadu lebih dari 2 adalah ...

   a. $\frac{1}{6}$ c. $\frac{3}{8}$ e. $\frac{5}{8}$
   b. $\frac{1}{4}$ d. $\frac{2}{3}$

7. Diberikan dua buah bilangan bulat berbeda yang berjumlah 37. Apabila bilangan yang lebih besar dibagi dengan bilangan yang lebih kecil, maka hasil baginya adalah 3 dan sisanya 5. Selisih kedua bilangan tersebut adalah ...

   a. 21 c. 23 e. 25

   b. 22 d. 24

8. Jika $x : y = 3 : 4$, maka nilai $\frac{x}{x-y} - \frac{x^2}{x^2+y^2}$ adalah ...

   a. $-\frac{84}{25}$ b. $\frac{66}{25}$ e. $\frac{115}{25}$

   b. $-\frac{66}{25}$ d. $\frac{84}{25}$

9. Roda A dengan jari-jari 40 cm dan roda B dengan jari-jari 10 cm dihubungkan dengan sebuah tali yang melingkari keduanya. Jika jarak pusat kedua roda adalah 60 cm, maka panjang tali yang dibutuhkan adalah ... cm.

   a. $60\left(\sqrt{3}+\pi\right)$

   b. $56\left(\sqrt{3}+\pi\right)$

   c. $50\left(\sqrt{3}+\pi\right)$

   d. $40\left(\sqrt{3}+\pi\right)$

   e. $38\left(\sqrt{3}+\pi\right)$

10. Pada segitiga *ABC* (siku-siku di *C*), titik *Q* pada *AC*, titik *P* pada *AB*, dan *PQ* sejajar *BC*. Panjang sisi $AQ = 3$; $AP = 5$; $BC = 8$, maka luas *ABC* adalah ...

    a. 48 c. 24 e. 12

    b. 36 d. 22

11. Jika diberikan $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + ... + (-1)^{n-1} n$, dengan *n* bilangan asli, maka nilai $S_{17} + S_8 + S_{45}$ adalah ...

    a. –5 b. 0 c. 17 d. 28 e. 30

12. Tersedia tujuh gambar yang berbeda akan dipilih empat gambar yang akan dipasang membentuk barisan memanjang. Banyaknya cara yang dapat dilakukan jika sebuah gambar yang terpilih harus selalu dipasang di ujung adalah ...

    a. 420   c. 520   e. 710

    b. 504   d. 720

13. Diketahui $3x$, $\frac{3}{x}$, $\frac{15}{x}$ adalah bilangan bulat. Manakah dari ketiga bentuk di bawah ini yang x juga merupakan bilangan bulat untuk nilai-nilai x yang memenuhi ketiga bentuk di atas?

    I. $\frac{x^2+1}{3}$ II. $2x$ III. $6x$

    a. I   c. III   e. II dan III

    b. II   d. I dan III

14. Bilangan ratusan yang berupa bilangan prima dimana perkalian ketiga angka penyusun bilangan tersebut adalah 10 ada sebanyak ... buah bilangan.

    a. 6   c. 4   e. 2

    b. 5   d. 3

15. Sebuah prisma segiempat berukuran 15 cm × 15 cm × 10 cm, terbuat dari baja. Prisma tersebut setiap rusuknya diberi kerangka terbuat dari kawat dan setiap sisi dicat. Harga baja tiap 1 cm^2 adalah Rp. 800,00; setiap 4 cm kawat harganya Rp. l.300,00; dan setiap 10 cm^2 membutuhkan cat seharga Rp. l.600,00. Biaya untuk membuat prisma segiempat tersebut adalah ...

    a. Rp. 2.020.000,00

    b. Rp. l.160.000,00

    c. Rp. l.060.000,00

    d. Rp. l.050.000,00

    e. Rp. l.030.000,00

16. Jika $P(x) = Q(x)(x - a)$, dimana $P(x)$ dan $Q(x)$ polinom, maka:

    a. $P(a) \neq 0$

    b. $x - a$ bukan faktor dari $P(x)$

    c. kurva $y = P(x)$ memotong sumbu x di titik (a, 0)

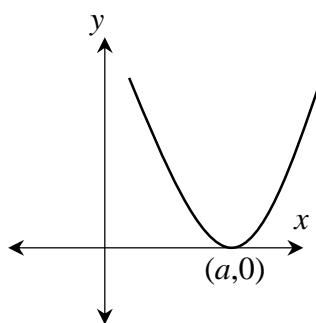
    d. kurva $y = P(x)$ memotong sumbu x di titik (–a, 0)

    e. titik potong terhadap sumbu x tidak dapat ditentukan

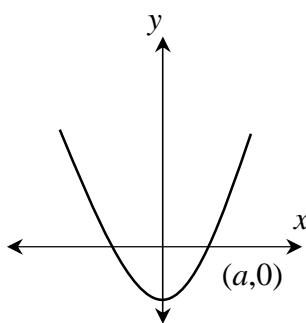
17. Empat kubus identik dengan panjang rusuk 5 cm disusun menjadi suatu bangun ruang dengan cara menempelkan sisi-sisinya. Banyak bangun ruang berbeda yang terbentuk adalah ...

    a. 10 c. 6 e. 3

    b. 8 d. 5

18. Fungsi $f(x) = x^2 - ax$ mempunyai grafik berikut.

Grafik fungsi $g(x) = x^2 + ax + 5$ adalah ..

a.

c.

b.

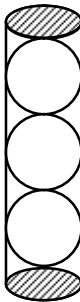
d.

e.

19. Terdapat 3 orang Indonesia, 4 orang Belanda, dan 2 orang Jerman akan duduk dalam bangku yang memanjang. Banyaknya susunan yang terjadi jika duduknya berkelompok menurut kewarganegaraannya adalah ...

    a. 24
    b. 48
    c. 288
    d. 536
    e. 1728

20. Anto mempunyai 20 lembar seribuan, 4 lembar lima ribuan dan 2 lembar sepuluh ribuan. Jika x, y, dan z adalah banyaknya seribuan, lima ribuan, dan sepuluh ribuan, maka banyak cara berbeda sehingga jumlahnya dua puluh ribu adalah ...

    a. 6
    b. 7
    c. 8
    d. 9
    e. 10

BAGIAN B: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Sebuah ΔABC sama kaki dipotong menjadi dua buah segitiga sama kaki (tidak harus kongruen) dengan membagi dua sama besar salah satu sudut alasnya. Ukuran sudut yang terkecil dari segitiga ΔABC adalah ...

2. Sebuah kotak berisi bola merah dan hijau. Jika empat bola merah dikeluarkan dari kotak maka sepersepuluh sisanya adalah bola merah. Akan tetapi jika empat bola hijau dikeluarkan dari kotak maka seperlima sisanya adalah bola merah. Banyak bola merah yang semula berada di dalam kotak tersebut adalah ...

3. Sebuah perahu motor meninggalkan kapal induk ke arah utara menuju suatu target dengan kecepatan tetap 80 km/jam. Kapal induk bergerak ke arah timur dengan kecepatan tetap 40 km/jam. Apabila perahu motor tersebut hanya mempunyai bahan bakar yang cukup untuk berjalan 4 jam saja, maka jarak maksimum target yang dapat ditujunya agar ia dapat kembali ke kapal induk dengan tanpa masalah adalah ... km.

4. Suatu pekerjaan jika dikerjakan oleh Anto dan Dini dapat diselesaikan dalam waktu 6 jam. Jika pekerjaan itu dikerjakan oleh Dini sendirian akan selesai lima jam lebih lambat dibandingkan Anto. Pekerjaan itu dapat diselesaikan oleh Anto sendirian dalam waktu ...

5. Diketahui jajargenjang $ABCD$; $\angle A = \angle C = 45°$. Lingkaran K dengan pusat C melalui B dan D. AD diperpanjang memotong lingkaran di E dan BE memotong CD di H. Perbandingan luas antara $ABCH$ dengan $AEHD$ adalah ...

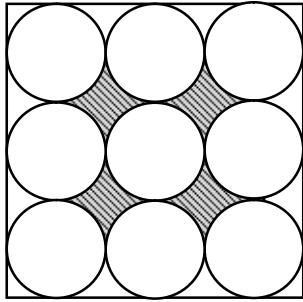
6. Jika jumlah k bilangan bulat positif berurutan adalah 2010, dengan $k > 1$, maka k terkecil yang mungkin adalah ...

7. Diketahui $ABCD$ adalah persegi. Titik E merupakan perpotongan AC dan BD pada persegi $ABCD$ yang membentuk persegi baru $EFGH$. EF berpotongan dengan CD di I dan EH berpotongan dengan AD di J. Panjang sisi $ABCD$ adalah 4 cm dan panjang sisi $EFGH$ adalah 8 cm. Jika $\angle EID = 60°$, maka luas segiempat $EIDJ$ adalah ... cm^2.

8. Kereta penumpang berpapasan dengan kereta barang. Laju kereta penumpang 40 km/jam sedangkan kereta barang 20 km/jam. Seorang penumpang di kereta penumpang mencatat bahwa kereta barang berpapasan selama 15 detik. Panjang rangkaian KA barang adalah...

9. Jika operasi * terhadap bilangan rasional positif didefinisikan sebagai $a*b = \frac{ab}{a+b}$, maka 3*(3*3) = ...

10. Sebuah kubus akan diberi warna sedemikian sehingga setiap dua sisi yang berdekatan (yakni dua sisi yang dipisahkan oleh tepat satu rusuk) diberi warna yang berbeda. Jika diberikan 5 warna yang berbeda, maka banyak cara yang berbeda untuk mewarnai kubus adalah ...

SELEKSI TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2011

BAGIAN A: SOAL PILIHAN GANDA

1. Nilai $\frac{1}{8!}-\frac{2}{9!}+\frac{3}{10!}=...$

   a. $\frac{113}{10!}$

   b. $\frac{91}{10!}$

   c. $\frac{73}{10!}$

   d. $\frac{71}{10!}$

   e. $\frac{4}{10!}$

2. Menggunakan angka-angka 1, 2, 5, 6 dan 9 akan dibentuk bilangan genap yang terdiri dari lima angka. Jika tidak ada angka yang berulang, maka selisih bilangan terbesar dan terkecil adalah ...

   a. 70820

   b. 79524

   c. 80952

   d. 81236

   e. 8391

3. Pada gambar berikut tabung berisi air, tinggi dan diameter tabung tersebut adalah 18 cm dan 6 cm. Kemudian ke dalam tabung dimasukkan 3 bola pejal yang identik (sama bentuk) sehingga bola tersbut menyinggung sisi tabung dan air dalam tabung keluar, maka sisa air di dalam tabung adalah ... cm.

   a. 51π

   b. 52π

   c. 53π

   d. 54π

   e. 55π

4. Seorang ilmuwan melakukan percobaan terhadap 50 ekor kelinci. dan melaporkan hasilnya sebagai berikut:

- 25 ekor diataranya kelinci jantan.
- 25 ekor dilatih menghindari jebakan, 10 ekor diantaranya jantan.
- 20 ekor (dari total 50 ekor) berhasil menghindari jebakan, 4 ekor diantaranya jantan.
- 15 ekor yang pernah dilatih berhasil menghindari jebakan, 3 ekor diantaranya jantan.

Berapa ekor kelinci betina yang tidak pernah dilatih, tidak dapat menghindari jebakan?

a. 5 c. 7 e. 9

b. 6 d. 8

5. Banyaknya bilangan bulat x sehingga $\frac{1}{2+\sqrt{x}}+\frac{1}{2-\sqrt{x}}$ merupakan bilangan bulat adalah

a. 2 c. 5 e. 7

b. 3 d. 6

6. Urutan tiga bilangan 2^{4444}, 3^{3333}, dan 4^{2222} dari yang terkecil sampai yang terbesar adalah

a. 2^{4444}, 4^{2222}, 3^{3333}

b. 2^{4444}, 3^{3333}, 4^{2222}

c. 3^{3333}, 4^{2222}, 2^{4444}

d. 4^{2222}, 3^{3333}, 2^{4444}

e. 3^{3333}, 2^{4444}, 4^{2222}

7. Lima pasang suami istri akan duduk di 10 kursi secara memanjang. Banyaknya cara mengatur tempat duduk mereka sehingga setiap pasang suami istri duduk berdampingan adalah ...

a. 3800 c. 3840 e. 3940

b. 3820 d. 3900

8. Dalam sebuah kotak berisi 15 telur, 5 telur diantaranya rusak. Untuk memisahkan telur baik dan telur yang rusak dilakukan pengetesan satu

persatu tanpa pengembalian. Peluang diperoleh telur rusak ke-3 pada pengetesan ke-5 adalah ...

a. $\frac{80}{1001}$ c. $\frac{100}{1001}$ e. $\frac{120}{1001}$

b. $\frac{90}{1001}$ d. $\frac{110}{1001}$

9. Diketahui limas *T.ABCD*. panjang rusuk *AB* = 2 cm dan *TA* = 4 cm. Jarak titik *M* dan rusuk *TD* adalah ...

a. $\sqrt{5}$ c. $\sqrt{7}$ e. $2\sqrt{5}$

b. $\sqrt{6}$ d. $2\sqrt{6}$

10. Sembilan lingkaran kongruen terletak di dalam persegi seperti terlihat pada gambar. jika keliling sebuah lingkaran 62,8 cm dengan π = 3,14, maka luas daerah yang diarsir adalah ... cm^2.

a. 344 c. 484 e. 728

b. 364 d. 688

11. Suatu jam dinding selalu menghasilkan keterlambatan lima menit untuk setiap jamnya. Jika saat sekarang jam tersebut menunjukkan waktu yang tepat, maka jam tersebut akan menunjukkan waktu yang tepat setelah ... jam.

a. 105 c. 114 e. 144

b. 110 d. 124

12. Di dalam kotak terdapat 18 bola identik (berbentuk sama), 5 berwarna hitam, 6 berwarna putih dan 7 berwarna hijau. Jika diambil dua bola secara acak, maka peluang yang terambil bola berwarna sama adalah ...

a. $\frac{46}{153}$ c. $\frac{4}{105}$ e. $\frac{55}{152}$

b. $\frac{13}{36}$ d. $\frac{55}{162}$

13. Perhatikan gambar di atas, persegi *ABCD* dengan panjang sisi 14 cm menyinggung lingkaran. Masing-masing sisi persegi dibuat setengah lingkaran dengan diameter sisi persegi tersebut. Jika π = 3,14, maka luas daerah yang diarsir adalah ... cm^2.

    a. 49 c. 112 e. 196

    b. 56 d. 178

14. Diketahui $2^{2x} + 2^{-2x} = 2$. Nilai $2^x + 2^{-x} = ...$

    a. 1 c. $\sqrt{2}$ e. $\sqrt{3}$

    b. 2 d. 3

15. Rataan usia kelompok guru dan profesor adalah 40 tahun. Jika rataan kelompok guru adalah 35 tahun sedangkan rataan kelompok profesor adalah 50 tahun, perbandingan banyaknya guru dengan profesor adalah ...

    a. 2 : 1 c. 3 : 2 e. 3 : 4

    b. 1 : 2 d. 2 : 3

16. Diketahui jajargenjang *ABCD*. Titik *P* dan *Q* terletak pada *AC* sehingga *DP* dan *BQ* tegak lurus *AC*. Jika panjang *AD* = 13 cm, *AC* = 25 cm dan luas jajargenjang tersebut adalah 125 cm^2, maka panjang *PQ* adalah ... cm.

    a. $\frac{1}{2}$ b. 1 c. $\sqrt{2}$ d. $\sqrt{3}$ e. $\frac{4}{3}$

17. $\sqrt{54+14\sqrt{5}}+\sqrt{12-2\sqrt{35}}+\sqrt{32-10\sqrt{7}}=...$

    a. 10 b. 11 c. 12 d. $5\sqrt{6}$ e. $6\sqrt{6}$

18. Hasil penjumlahan 1! + 2! + 3! + ... + 2011! adalah suatu bilangan yang angka satuannya adalah ...

    a. 3 b. 4 c. 5 d. $\sqrt{6}$ e. $\sqrt{7}$

19. Lima orang akan pergi ke pantai menggunakan sebuah mobil berkapasitas 6 tempat duduk. Jika hanya ada dua orang yang bisa menjadi sopir. maka banyaknya cara mengatur tempat duduk di dalam mobil adalah ...

    a. 60 c. 180 e. 280

    b. 120 d. 240

20. Sebuah bingkai foto yang berbentuk persegi diputar 45° dengan sumbu putar titik perpotongan diagonal-diagonalnya. Jika panjang sisi persegi adalah 1 cm. Luas irisan antara bingkai foto sebelum dan sesudah diputar adalah ... cm^2.

    a. $1 + 2\sqrt{2}$

    b. $2 + 2\sqrt{2}$

    c. 1

    d. $2 - 2\sqrt{2}$

    e. $2\sqrt{2} - 2$

BAGIAN B: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Lima permen identik (berbentuk sama). satu rasa apel. dua rasa jeruk dan dua rasa jahe akan dibagikan kepada lima sekawan Anto, Bono, Carli, Dodo dan Edo, sehingga masing-masing mendapat satu permen. Peluang Anto mendapat permen rasa jahe adalah

2. Jumlah angka-angka dari hasil kali bilangan 999999999 dengan 12345679 adalah ...

3. Perhatikan gambar berikut. *ABCD* persegi dengan panjang sisi sisinya adalah 2 cm. *E* adalah titik tengah *CD* dan *F* adalah titik tengah *AD*. Luas daerah *EDFGH* adalah ...

4. Nilai jumlahan bilangan berikut adalah ...

    $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - ... - 2010^2 + 2011^2$

5. Jika barisan $x_1, x_2, x_3, ...$ memenuhi $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = n^3$ untuk semua n bilangan asli, maka $x_{100} = ...$

6. Semua pasangan bilangan bulat (a,b) yarig mememihi $2a = b^2 - 1$ adalah ...

7. Tersedia beberapa angka 2. 0 dan 1. Angka dua ada sebanyak lima buah masing-masing berwarna merah, hijau, kuning, biru dan nila. Angka nol dan

satu masing-masing ada sebanyak empat buah dengan warna masing-masing merah, hijau, kuning dan biru. Selanjutnya menggunakan angka-angka tersebut akan dibentuk bilangan 2011 sehingga angka-angka yang bersebelahan tidak boleh sewarna. Contoh pewarnaan yang dimaksud: 2(merah) 0(hijau) 1(merah) 1(biru). contoh bukan pewarnaan yang dimaksud: 2(merah) 0(hijau) 1(hijau) 1(biru). Banyaknya bilangan 2011 dengan komposisi pewarnaan tersebut adalah ...

8. Sebuah kotak berisi 500 kelereng berukuran sama yang terdiri dari 5 warna dimana masing-masing kelereng sewarna berjumlah 100. Minimum banyaknya kelereng yang harus diambil secara acak sedemikian sehingga kelereng yang terambil dijamin memuat sedikitnya 5 kelereng yang berwarna sama adalah ...

9. Jika $(3 + 4)(3^2 + 4^2)(3^4 + 4^4)(3^8 + 4^8)(3^{16} + 4^{16})(3^{32} + 4^{32}) = (4^x - 3^y)$. Maka $x - y = ...$

10. Suatu himpunan disebut berjenis H jika memenuhi sifat:

    a) Himpunan tersebut beranggotakan tiga bilangan bulat tak negatif.

    b) Rata-rata ketiga bilangan anggota himpunan tersebut adalah 15.

    Banyaknya semua Himpunan berjenis H ini adalah ...

SELEKSI TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2012

BAGIAN A: SOAL PILIHAN GANDA

1. Pernyataan yang benar di antara pernyataan-pernyataan berikut adalah ...

   a. $\{\varnothing\} \in \varnothing$

   b. $\{\varnothing\} \subseteq \varnothing$

   c. $\varnothing \subseteq \varnothing$

   d. $\{a,b\} \in \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

   e. $\{a,\varnothing\} \subseteq \{a,\{a,\varnothing\}\}$

2. Diketahui persegi *ABCD*. Jika titik *E* terletak pada *BC* dan titik *F* terletak pada *CD* sehingga *AE* dan *AF* membagi persegi *ABCD* menjadi 3 daerah yang luasnya sama, maka perbandingan luas segitiga *AEF* terhadap luas persegi *ABCD* adalah ...

   a. $\frac{4}{18}$ c. $\frac{6}{18}$ e. $\frac{8}{18}$

   b. $\frac{5}{18}$ d. $\frac{7}{18}$

3. Jika kedua akar persamaan $p^2x^2 - 4px + 1 = 0$ bernilai negatif, maka nilai p adalah ...

   a. $p < 0$

   b. $p < \sqrt{3} - \frac{1}{2}$

   c. $p < \sqrt{3} + \frac{1}{2}$

   d. $p < \sqrt{3}$

   e. $p < 2 - \sqrt{3}$

4. Jika $f(x) = 3x + 1$, $g(x\} = 1 - 2x$.dan $f(g(a)) = 28$, maka nilai a adalah ...

   a. –7 b. –4 c. 4 d. 7 e. 13,5

5. Suatu *byte* didefinisikan sebagai susunan angka yang terdiri dari 8 angka (digit), yaitu 0 atau 1. Contoh *byte*: 01110111. Banyak jenis *byte* yang memuat angka 1 tepat sebanyak 5 adalah ...

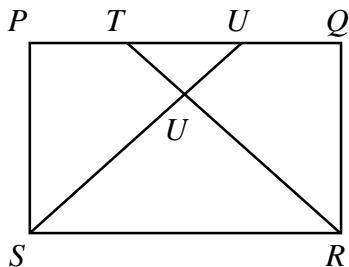
   a. 30 b. 45 c. 56 d. 62 e. 66

6. Perhatikan pola bilangan berikut. Bilangan 2012 akan terlerak di bawah huruf ...

P	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*
	1		2		3	
7		6		5		4
	8		9		10	
...		...		...		...

   a. *Q* b. *R* c. *S* d. *T* e. *U*

7. Jika m dan n adalah bilangan bulat positif sehingga $m^2 + 2m + 3n = 33$, maka banyak bilangan n yang memenuhi adalah ....

   a. 7 c. 5 e. 3
   b. 6 d. 4

8. Enam pipa besar dapat mengeringkan sebuah kolam dalam waktu 5 jam, sedangkan delapan pipa kecil dapat mengeringkan kolam tersebut dalam waktu 10 jam. Waktu yang diperlukan untuk mengeringkan kolam tersebut apabila menggunakan 3 pipa besar dan 5 pipa kecil adalah ... jam

   a. $\frac{60}{13}$ c. $\frac{90}{13}$ e. 9
   b. $\frac{80}{13}$ d. 8

9. Lima orang guru akan ditempatkan pada tiga sekolah yang berbeda, 2 orang di sekolah pertama, 2 orang di sekolah kedu, dan 1 orang di sekolah ketiga. Banyak cara menempatkan kelima orang guru tersebut adalah ...

   a. 40 c. 20 e. 4
   b. 30 d. 10

10. Diketahui persegi panjang $PQRS$ panjang $PV = QT = PS = 6$. Titik U adalah perpotongan antara garis SV dan RT (seperti gambar di bawah). Jika $PQ = 10$ maka, luas segiempat $PTUS$ adalah ...

a. 15
b. 17
c. 19
d. 21
e. 23

11. Empat bola bernomor 1, 2, 3, dan 4 diletakkan dalam sebuah kotak. Sebuah bola diambil secara acak dari kotak tersebut. Nomor yang muncul dicatat, kemudian bola dikembalikan ke kotak semula. Jika proses pengambilan bola dilakukan sampai tiga kali dengan cara yang serupa, maka peluang nomor bola yang terambil berjumlah 5 adalah ...

a. $\frac{5}{256}$
b. $\frac{5}{64}$
c. $\frac{1}{16}$
d. $\frac{3}{32}$
e. $\frac{3}{16}$

12. Suatu antrian pembelian tiket masuk pertandingan sepak bola terdiri dari 2012 orang. Jika di antara 2 pria paling sedikit terdapat 3 wanita, maka banyak pria pada antrian tersebut paling banyak adalah ...

a. 501
b. 502
c. 503
d. 504
e. 505

13. Diketahui abc dan def adalah bilangan yang terdiri dari 3 angka (digit) sehingga $abc + def = 1000$. Jika $a, b, c, d, e,$ atau f tidak satupun yang sama dengan 0, maka nilai $a + b + c + d$ adalah ...

a. 25
b. 26
c. 27
d. 28
e. 29

14. Suatu tes matematika terdiri dari 5 soal pilihan ganda dengan lima pilihan dan hanya ada satu pilihan yang benar. Jika Mulan menjawab soal secara menerka (secara acak atau asal-asalan), maka peluang tepat dua soal dijawab dengan benar adalah ...

    a. $\frac{32}{725}$
    b. $\frac{32}{625}$
    c. $\frac{64}{725}$
    d. $\frac{64}{625}$
    e. $\frac{128}{625}$

15. Untuk setiap bilangan bulat x didefinisikan fungsi f dengan $f(x)$ adalah banyak angka (digit) dari bilangan x. Contoh: $f(125) = 3$ dan $f(2012) = 4$. Nilai $f(2^{2012}) + f(5^{2012})$ adalah ...

    a. 2013
    b. 2014
    c. 2015
    d. 2016
    e. 2025

16. Dalam sebuah karung terdapat 60 kaos bernomor 11, 12, 13, ... , 40. Ada 2 kaos untuk setiap nomor (nomor l l ada 2 kaos, nomor 12 ada 2 kaos, dan seterusnya). Jika diambil 2 kaos secara acak, maka peluang yang terambil adalah kaos yang bernomor sama adalah ..

    a. $\frac{1}{59}$
    b. $\frac{2}{35}$
    c. $\frac{2}{33}$
    d. $\frac{2}{31}$
    e. $\frac{2}{29}$

17. Sehabis belanja, Ratina membawa pulang uang kembalian berupa 8 koin (uang receh), yang terdiri dari ratusan, lima-ratusan, dan ribuan. Total nilai uang kembalian adalah tiga ribu rupiah. Sayangnya, dalam perjalanan pulang salah satu uang koin jatuh (hilang). Jika peluang kehilangan untuk satu ratusan, satu lima-ratusan, dan satu ribuan adalah sama, maka peluang kehilangan satu koin lima-ratusan adalah ...

    a. $\frac{1}{8}$
    b. $\frac{2}{8}$
    c. $\frac{3}{8}$
    d. $\frac{4}{8}$
    e. $\frac{5}{8}$

18. Jika 2, 3, 5, 6, 7, 10, l l, ... adalah barisan yang terdiri dari semua bilangan asli yang bukan bilangan kuadrat dan bukan bilangan pangkat tiga, maka bilangan 270 adalah suku ke ...

    a. 247
    b. 248
    c. 249
    d. 250
    e. 251

19. Suatu balok dengan volume 240 satuan mempunyai panjang a, lebar b, dan tinggi c (a, b, dan c adalah bilangan asli). Jika $a + b + c = 19$ dan $a > b > c > 3$, maka luas permukaan balok yang sisinya mempunyai rusuk b dan c adalah ...

    a. 64
    b. 60
    c. 48
    d. 40
    e. 30

20. Perhatikan gambar di bawah ini. Jika lingkaran besar berjari-jari 4 dan lingkaran kecil berjari-jari 2, serta luas daerah yang diarsir adalah $\frac{5}{12}$ luas lingkaran besar, maka besar $\angle RPQ$ adalah ...

    a. 60°
    b. 90°
    c. 120°
    d. 135°
    e. 150°

BAGIAN B: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Diketahui 2012 bilangan bulat positif berurutan. Jika setiap bilangan tersebut dibagi 5, kemudian sisa-sisa pembagiannya dijumlahkan, maka hasil penjumlahan sisa-sisanya adalah ...

2. Jika $a = b + 2$, $a^2 = b^2 + 6$ dan $3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 = 10 + (a + b)^3$, maka nilai c adalah ...

3. Jika segitiga ABC siku-siku di B, $AB = 6$, $AC = 10$, dan AD adalah garis bagi sudut BAC, maka panjang AD adalah ...

4. Semua nilai x yang memenuhi persamaan $\sqrt{(6x-2)-(4x-3)}=1$ adalah ...

5. Jika rata-rata 1000 bilangan ganjil positif berurutan adalah 2012, maka bilangan terkecil dari bilangan-bilangan tersebut adalah ...

6. Jalan Majapahit sejajar dengan jalur kereta api yang membentang lurus. Anton menumpang bus OSN dijalan Majapahit dengan kecepatan konstan (tetap) 40 km/jam. Dari arah berlawanan, bus yang ditumpangi Anton berpapasan dengan kereta api barang yang bergerak dengan kecepatan konstan 20 km/jam. Anton mencatat bahwa bus dan kereta api berpapasan selama seperempat menit terhitung mulai dari lokomotif (bagian paling depan) sampai bagian paling belakang. Panjang kereta api tersebut adalah ... meter

7. Banyak himpunan bagian dari himpunan $\{a, b, c, d, e, f\}$ yang memuat sedikitnya satu huruf vokal adalah ...

8. Empat titik ditempatkan pada lingkaran berjari-jari $\frac{1}{2}$ satuan. Jika keempat titik tersebut dihubungkan sehingga membentuk persegi panjang, maka luas terbesar (maksimum) yang mungkin bagi persegi panjang tersebut adalah ...

9. Kubus $ABCD.EFGH$ mempunyai panjang rusuk 2 cm. Jika titik T adalah titik potong diagonal bidang $BCGF$, titik P adalah titik tengah rusuk AB, dan titik Q adalah titik tengah rusuk DC, maka jarak antara titik T dengan bidang $PQHE$ adalah ... cm.

10. Misalkan ab adalah bilangan terdiri dari dua angka. Jika bilangan itu ditambah 45, maka diperoleh bilangan ba. Pada bilangan ab, jika di antara a dan b disisipkan angka 0, maka diperoleh bilangan yang nilainya $7\frac{2}{3}$ kali bilangan ab. Bilangan ab tersebut adalah ...

SELEKSI TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2013

BAGIAN A: SOAL PILIHAN GANDA

1. Bentuk $x^4 - 1$ mempunyai faktor sebanyak ...

   a. 3 c. 5 e. 6

   b. 4 d. 6

2. Jika a, b, c, dan d adalah bilangan bulat positif dibagi 13 berturut-turut bersisa 12, 9, 11, dan 7, maka $3a + 4b - 3c + 2d$ dibagi 13 akan bersisa ...

   a. 0 c. 7 e. 11

   b. 1 d. 9

3. Nilai rata-rata kelas A adalah 73, sedangkan nilai rata-rata kelas B adalah 88. Jika jumlah siswa kedua kelas tersebut adalah 75 dan nilai rata-rata kedua kelas adalah 80, maka banyak siswa kelas A adalah ... orang

   a. 35 c. 40 e. 45

   b. 38 d. 42

4. Suatu hari perbandingan jumlah uang Netty dan Agit adalah 2 : 1. Sehari kemudian Netty memberikan uangnya sejumlah Rp100.000,00 kepada Agit. Sekarang perbandingan uang Netty dan Agit adalah 1 : 3. Jumlah uang Netty sekarang adalah Rp. ...

   a. 240.000,00

   b. 180.000,00

   c. 120.000,00

   d. 100.000,00

   e. 60.000,00

5. Jika f adalah fungsi linier, $f(1) = 2000$, dan $f(x + 1) + 12 = f(x)$, maka nilai $f(100) = ...$

   a. 762 c. 832 e. 1012

   b. 812 d. 912

6. Diketahui $H = \{k \mid x^2 - 1 < x^2 + k < 2(x + 1)$, dengan x dan k bilangan bulat$\}$. Banyaknya himpunan bagian dari himpunan H adalah ...

   a. 4 c. 16 e. 64
   b. 8 d. 32

7. Tiga orang A, B, dan C pinjam meminjam kelereng. Pada awalnya ketiga orang tersebut memiliki sejumlah kelereng tertentu dan selama pinjam meminjam mereka tidak melakukan penambahan kelereng selain melalui pinjam meminjam diantara ketiga orang tersebut. Pada suatu hari A meminjami sejumlah kelereng kepada B dan C sehingga jumlah kelereng B dan C masing-masing menjadi dua kali lipat jumlah kelereng sebelumnya. Hari berikutnya B meminjami sejumlah kelereng kepada A dan C sehingga jumlah kelereng A dan C masing-masing menjadi dua kali lipat jumlah kelereng sebelumnya. Hari terakhir C meminjami sejumlah kelereng kepada A dan B sehingga jumlah kelereng A dan B masing-masing menjadi dua kali lipat jumlah kelereng sebelumnya. Setelah dihitung akhirnya masing-masing memiliki 16 kelereng. Banyak kelereng A mula-mula adalah ...

   a. 8 c. 26 e. 32
   b. 14 d. 28

8. Jika jumlah dua bilangan positif adalah 24, maka nilai terkecil dari jumlah kebalikan bilangan-bilangan tersebut adalah ...

   a. 1 c. $\frac{1}{3}$ e. $\frac{1}{6}$
   b. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{4}$

9. Jika $\frac{2013}{7000}$ ditulis dalam bentuk desimal, maka angka ke-2013 di belakang koma adalah..

   a. 1 b. 2 c. 4 d. 5 e. 8

10. Diberikan angka disusun sebagai berikut: 987654321. Berapa banyak tanda operasi penjumlahan harus disisipkan di antara angka-angka tersebut agar menghasilkan jumlah 99?

   a. 3 b. 4 c. 5 d. 7 e. 8

11. Jika barisan berikut adalah barisan bilangan bulat positif berurutan yang dihilangkan semua bilangan kelipatan tiga: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, ..., maka suku ke-67 barisan tersebut adalah ...

    a. 59 b. 62 c. 86 d. 92 e. 100

12. Jika rata-rata 51 bilangan bulat berurutan adalah 10, maka bilangan terkecil dari semua bilangan tersebut adalah ...

    a. 5 b. 0 c. –5 d. –13 e. –15

13. Sebuah kantong berisi 15 bola merah, 12 bola biru, dan 3 bola hijau. Diambil sebuah bola secara acak sebanyak 2 kali tanpa pengembalian. Peluang bola yang terambil merah pada pengambilan pertama dan hijau pada pengambilan kedua adalah ...

    a. $\frac{1}{20}$ b. $\frac{3}{58}$ c. $\frac{1}{5}$ d. $\frac{3}{29}$ e. $\frac{6}{29}$

14. Lima orang anak akan naik mobil dengan kapasitas enam tempat duduk, yakni dua di depan termasuk pengemudi (Sopir), dua di tengah, dan dua di belakang. Jika hanya ada dua orang yang bisa mengemudi, banyak cara mengatur tempat duduk mereka adalah ...

    a. 120 c. 220 e. 280

    b. 200 d. 240

15. Jika diketahui panjang rusuk kubus *ABCD.EFGH* adalah 1 satuan, maka jarak titik *E* ke bidang datar *AFH* adalah ... satuan

    a. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{3}$ e. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

    b. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

16. Diketahui sekelompok data memiliki sifat-sifat berikut:

    i. Terdiri dari 5 data bilangan bulat positif dengan rataan = 7
    ii. Median = modus = 9

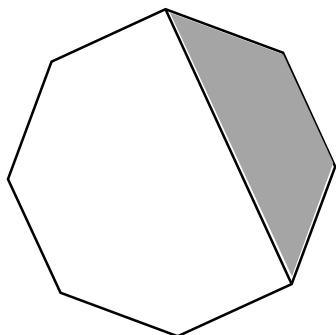
    Jika jangkauan didefinisikan sebagai selisih data terbesar dengan data terkecil, maka jangkauan terbesar yang mungkin adalah ...

    a. 11 b. 12 c. 13 d. 14 e. 15

17. Di dalam suatu keranjang terdapat 12 apel Malang, dua diantaranya diketahui busuk. Jika diambil 3 apel secara acak (random), maka peluang tepat satu di antaranya busuk adalah ...

    a. $\frac{9}{22}$ c. $\frac{4}{11}$ e. $\frac{5}{22}$

    b. $\frac{5}{11}$ d. $\frac{9}{44}$

18. Sebuah silinder tegak diletakkan di dalam kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang sisi kubus 2 m. Selanjutnya silinder dipancung oleh bidang miring yang melalui titik *A*, *B*, dan *T* dimana *T* adalah titik perpotongan diagonal bidang *CDHG*. Volume terbesar silinder terpancung ini adalah ... m^3.

    a. $\frac{3\pi}{2}$ c. $\frac{5\pi}{4}$ e. $\frac{7\pi}{5}$

    b. $\frac{4\pi}{3}$ d. $\frac{5\pi}{3}$

19. Jika gambar di bawah adalah segidelapan beraturan, maka perbandingan luas antara daerah yang diarsir dan luas segi delapan beraturan adalah ...

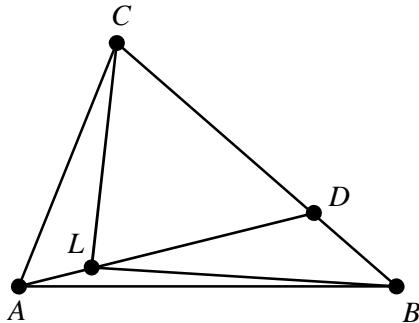
    a. 1 : 3 c. 2 : 5 e. 3 : 7

    b. 1 : 4 d. 3 : 8

20. Beberapa bilangan empat angka memiliki angka-angka penyusun tak nol yang saling berbeda dan berjumlah 10. Banyak bilangan yang dimaksud adalah ...

    a. 24 c. 20 e. 16

    b. 22 d. 18

BAGIAN B: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Tino sedang memanjat tangga dan sekarang dia berada tepat di tengah tangga. Jika ia naik 3 anak tangga ke atas, kemudian turun 5 anak tangga, serta naik kembali 10 anak tangga, maka Tino akan sampai di puncak tangga. Banyak anak tangga yang dimiliki tangga tersebut adalah ...

2. Ani mempunyai uang Rp. 16.500,00. Sejumlah uang itu akan dihabiskan untuk membeli 6 buah peralatan sekolah. Ia membeli beberapa pensil dengan harga Rp. 2.000,00 per pensil. Ia membeli beberapa buku dengan harga Rp. 2.500,00 per buku, dan ia juga membeli beberapa kotak pensil dengan harga Rp. 4.000,00 per kotak pensil. Banyak buku yang dibeli Ani adalah ...

3. Banyak bilangan positif n sehingga $\frac{2013}{n^2-3}$ berupa bilangan bulat positif adalah ...

4. Diberikan tabel bilangan berikut.

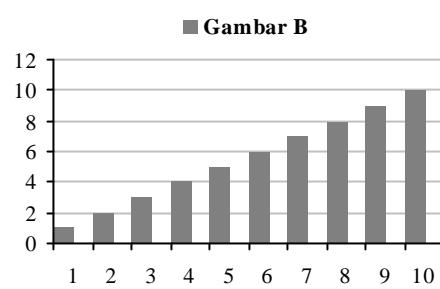
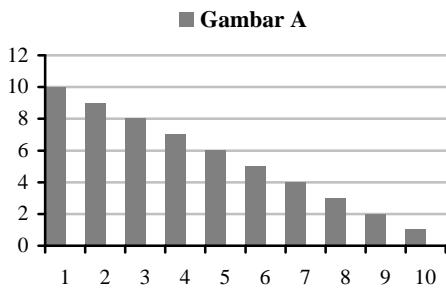
–7	x	–8
$2y$	–5	–4
$x - 2$	–10	y

   Jika diketahui bahwa jumlah masing-masing baris, kolom, dan diagonal adalah sama, maka nilai $x + y$ adalah ...

5. Jika himpunan A mempunyai anggota sebanyak x dan himpunan B mempunyai anggota sebanyak y, $x \leq y$, maka himpunan A ∪ B mempunyai anggota (maksimum) sebanyak ...

6. Semua bilangan asli n yang memenuhi sifat bahwa $6n^2 + 5n - 4$ adalah bilangan prima adalah ...

7. Jika $S_1 = 1,\ S_2 = S_1 - 3,\ S_3 = S_2 + 5,\ S_4 = S_3 - 7,\ S_5 = S_4 + 9,\ \ldots$ adalah suku-suku suatu barisan bilangan, maka $S_{2013} = \ldots$

8. Pada ΔABC terdapat titik D pada BC sehingga $BD : DC = 1 : 3$. Titik L pada AD sehingga $AL : LD = 1 : 4$. Perbandingan luas ΔACL dan ΔBDL adalah ...

9. Suatu *string* terdiri dari 10 angka 0, 1, atau 2. Bobot *string* didefinisikan sebagai jumlah angka-angka dalam *string* tersebut. Sebagai contoh, *string* 0002002001 mempunyai bobot 5. Banyak *string* dengan bobot 4 adalah ...

10. Tita memiliki tetangga baru yang memiliki 2 anak. Jika salah satu anak tetangga baru tersebut adalah perempuan, maka besar peluang anak yang lain adalah laki-laki adalah ...

SELEKSI TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2014

BAGIAN A: SOAL PILIHAN GANDA

1. Sepuluh orang guru akan ditugaskan mengajar di tiga sekolah, yakni sekolah A, B, dan C, berturut-turut sebanyak dua, tiga, dan lima orang. Banyak cara yang mungkin untuk menugaskan kesepuluh guru tersebut adalah ...

   a. 2520 c. 7250

   b. 5040 d. 10025

2. Berikut diberikan data siswa kelas VIII SMP Bina Prestasi. Tiga perlima bagian dari seluruh siswa adalah perempuan. Setengah dari siswa laki-laki diketahui pergi ke sekolah naik bus sekolah, sedangkan siswa perempuan hanya seperenamnya yang pergi ke sekolah naik bus sekolah. Diketahui juga bahwa terdapat 147 siswa pergi ke sekolah tidak naik bus sekolah. Banyak siswa kelas VIII sekolah tersebut adalah ...

   a. 330 b. 245 c. 210 d. 193

3. Diketahui FPB dan KPK dari bilangan 72 dan x berturut-turut adalah 3 dan 1800. Pernyataan berikut yang benar adalah ...

   a. x kelipatan 5

   b. x kelipatan 72

   c. x adalah genap

   d. x adalah faktor dari 3

4. Diberikan empat bilangan a, b, c, dan d. Jika rata-rata a dan b adalah 50, rata-rata b dan c adalah 75, serta rata-rata c dan d adalah 70, maka rata-rata a dan d adalah ...

   a. 35 b. 45 c. 50 d. 55

5. Rata-rata nilai dari 28 siswa adalah 80. Setelah ditambah nilai siswa A dan B, rata-ratanya menjadi 78. Jika nilai A tiga kali nilai B, maka selisih antara nilai A dan B adalah ...

   a. 15 b. 25 c. 70 d. 75

6. Diketahui persamaan kurva $y = x^3 + 4x^2 + 5x + 1$ dan $y = x^2 + 2x - 1$. Jika kedua kurva digambarkan pada bidang yang sama, maka banyak titik potong kedua kurva tersebut adalah ...

   a. 0 b. 1 c. 2 d. 3

7. Jika 3^n adalah faktor dari 18^{10}, maka bilangan bulat terbesar n yang mungkin adalah ...

   a. 10 b. 15 c. 18 d. 20

8. Pada sebuah bidang terdapat sepuluh titik. Di antara sepuluh titik tersebut tidak ada tiga titik atau lebih yang segaris. Banyak segitiga yang dapat dibentuk dengan menghubungkan sebarang tiga titik pada bidang tersebut adalah ...

   a. 30 b. 60 c. 100 d. 120

9. Kubus *ABCD.EFGH* mempunyai panjang rusuk 2 satuan. Titik *O* adalah titik potong dua diagonal pada bidang *BCFG*. Jarak titik *O* ke bidang *BCEH* adalah ... satuan.

   a. $\frac{\sqrt{2}}{5}$ b. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ c. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ d. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. Perhatikan diagram batang berikut.

Pernyataan berikut yang salah adalah ...

a. Modus pada gambar A < Modus pada gambar B

b. Median pada gambar A < Median pada gambar B

c. Quartil 1 pada gambar A < Quartil 1 pada gambar B

d. Rata-rata pada gambar A = Rata-rata pada gambar B

11. Banyak pasangan (x, y) dengan x dan y bilangan asli yang memenuhi $x^2 = y^2 + 100$ adalah ...

    a. 0 b. 1 c. 2 d. 3

12. Himpunan bilangan bulat dikatakan tertutup terhadap operasi penjumlahan jika hasil penjumlahan dua bilangan bulat adalah bilangan bulat. Himpunan bilangan bulat dikatakan tidak tertutup terhadap operasi pembagian karena ada hasil bagi dari sepasang bilangan bulat yang bukan bilangan bulat. Jika A = {0, 2, 4, 6 , ...} adalah himpunan bulat positif genap, maka pernyataan berikut yang benar adalah ...

    a. Himpunan A tertutup terhadap operasi perkalian saja
    b. Himpunan A tertutup terhadap operasi penjumlahan saja
    c. Himpunan A tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian
    d. Himpunan A tertutup terhadap operasi penjumlahan dan pengurangan

13. Segitiga *ABC* adalah segitiga samasisi dengan panjang sisi-sisinya 2 satuan. Selanjutnya, dibentuk segitiga kedua dengan menghubungkan tiga titik tengah pada masing-masing sisi segitiga *ABC*. Dengan cara serupa dibentuk segitiga ketiga, keempat, kelima, keenam, dan seterusnya. Luas seluruh segitiga-segitiga tersebut adalah ...

    a. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
    b. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
    c. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
    d. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

14. Sepuluh titik pada suatu lingkaran diberi nomor 1, 2, ..., 10. Seekor katak melompat searah jarum jam satu satuan. Jika katak berada pada nomor yang merupakan bilangan prima, dan tiga satuan jika bukan bilangan prima. Jika mula-mula katak berada pada posisi nomor 1, di manakah posisi katak setelah melompat 2014 kali?

    a. 1 b. 4 c. 7 d. 8

15. Diketahui garis l_1 sejajar garis l_2 dan garis l_3 sejajar garis l_4

Besar sudut $x - y$ adalah ...

a. 0° b. 10° c. 30° d. 50°

16. Suatu survey dilakukan terhadap 100 siswa peserta OSN tingkat kabupaten/kota berkaitan dengan frekuensi pengiriman sms pada suatu hari. Hasil yang diperoleh sebagai berikut.

Jumlah sms	Persentase
1 – 10	5%
11 – 20	10%
21 – 30	15%
31 – 40	20%
41 atau lebih	25%

Sisanya dilaporkan tidak mengirim sms. Jika dipilih seorang siswa secara acak, maka peluang siswa tersebut mengirim sms tidak lebih dari 30 kali adalah ...

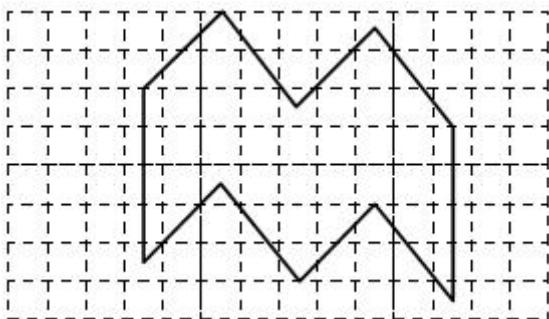
a. 0,55 b. 0,30 c. 0,25 d. 0,15

17. Diketahui titik E, F, dan G pada trapezium $ABCD$. Sisi FE sejajar dengan sisi AB. Jika $AB = 7$, $DC = 14$, $DG = 8$, $FG = 4$, GB = x, dan $GE = y$, maka nilai $x + y$ adalah ...

a. 10 b. 11 c. 12 d. 12

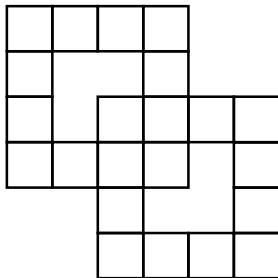
18. Dari survey terhadap 75 orang diperoleh hasil sebagai berikut.

    - 50 orang berumur lebih dari 25 tahun, sisanya berumur tidak lebih dari 25 tahun
    - 27 orang menyukai masakan pedas, 7 diantaranya berumur tidak lebih dari 25 tahun
    - 28 orang menyukai masakan manis, 25 diantaranya berumur lebih dari 25 tahun
    - 5 orang menyukai masakan pedas dan juga masakan manis
    - 25 orang tidak menyukai masakan pedas maupun masakan manis, 7 diantaranya berumur lebih dari 25 tahun

    Banyak orang yang berumur tidak lebih dari 25 tahun yang menyukai masakan pedas dan juga masakan manis adalah ...

    a. 2 b. 3 c. 4 d. 7

19. Jika luas satu persegi kecil adalah 4 m^2, maka luas bangun datar pada gambar di bawah adalah ...

    a. 36 c. 144

    b. 96 d. 162

20. Seorang guru memiliki 3 kantong permen yang akan dibagikan kepada para siswanya. Masing-masing kantong terdiri dari beberapa permen yang memiliki warna sama. Kantong pertama berisi permen berwarna merah, kantong kedua berisi permen berwarna kuning, dan kantong ketiga berisi permen berwarna hijau. Masing-masing siswa mendapatkan 7 permen dengan dua warna dan kombinasi yang berbeda untuk setiap siswa. Sebagai contoh, bila siswa A mendapat 3 permen berwarna merah dan 4 permen berwarna

hijau, maka tidak ada siswa lain yang mendapat bagian seperti siswa A. Maksimal banyak siswa yang ada di kelas tersebut adalah ...

a. 15

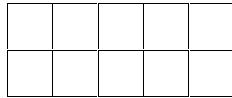
b. 18

c. 21

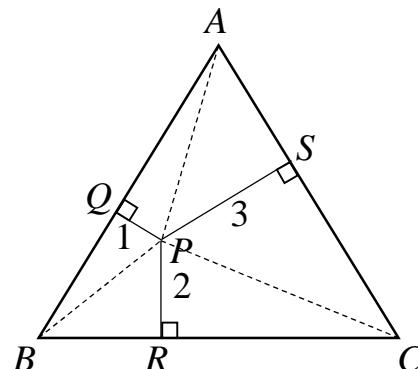
d. 24

BAGIAN B: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Bentuk paling sederhana dari $\frac{3^{2014} - 3^{2011} + 130}{3^{2011} + 5}$ adalah ...

2. Banyak persegi pada gambar berikut adalah ...

3. Berikut adalah gambar sebuah persegi panjang yang terdiri dari beberapa persegi yang dibuat dari batang korek api. Sebagai contoh, bentuk 1×5 memerlukan 16 batang korek api, bentuk 2×5 memerlukan 27 batang korek api, seperti gambar berikut.

   Bentuk 1×5

   Bentuk 2×5

   Banyak batang korek api yang diperlukan untuk membuat persegi panjang dengan bentuk 51×5 adalah ...

4. Jika $\underbrace{2+22+222+\cdots+222\ldots222}_{2014\text{ suku}} = \text{M}$, maka tiga angka terakhir dari M adalah ...

5. Semua nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\dfrac{(x-1)(x^2+6)}{x+3} \le x-1$ adalah..

6. Jika bilangan 2014 dinyatakan sebagai jumlah dari bilangan-bilangan asli berurutan, maka bilangan asli terbesar yang mungkin adalah ...

7. Delapan pensil dengan warna berbeda akan diletakkan dalam dua kotak mini untuk kepentingan promosi. Banyak cara yang mungkin untuk meletakkan pensil-pensil tersebut sehingga tidak ada kotak yang kosong adalah ...

8. Jika hasil penjumlahan empat dari enam pecahan $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{20}$, dan $\frac{1}{40}$ adalah $\frac{9}{10}$ maka hasil kali dua pecahan lainnya adalah ...

9. Perhatikan gambar di samping. ABC adalah segitiga samasisi. PQ tegak lurus AB, PS tegak lurus AC, dan PR tegak lurus BC.

   Jika $PQ = 1$, $PR = 2$, dan $PS = 3$, maka $AB = \ldots$

10. Diberikan dua segitiga dan delapan persegi dengan sifat-sifat berikut.

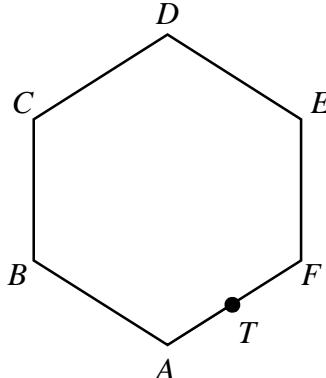
    (i) Dua segitiga siku-siku berukuran sama. Panjang sisi tegaknya 2 dan 4 satuan. Kedua segitiga tersebut berwarna berbeda, satu berwarna biru, dan lainnya berwarna ungu.

    (ii) Delapan persegi berukuran sama. Panjang sisi-sisinya 1 satuan. Tiga persegi berwarna merah, tiga persegi berwarna kuning, dan lainnya berwarna hijau.

    Dua segitiga dan delapan persegi tersebut akan disusun berimpitan sehingga membentuk persegi berukuran 4×4 satuan yang akan dipakai sebagai hiasan dinding. Dengan memperhatikan komposisi warna yang berbeda, banyak cara membentuk persegi berukuran 4×4 satuan di atas adalah ...

BAB 6

SELEKSI TINGKAT PROVINSI

SUBBAB

SELEKSI TINGKAT PROVINSI 2003

BAGIAN A: SOAL ISIAN SINGKAT

1. $\frac{5}{12}-\frac{2}{7}-\frac{1}{8}=\ldots$

2. Suatu botol dengan kapasitas 875 mililiter digunakan untuk mengisikan minyak kedalam suatu jerigen berkapasitas 20 liter. Berapa kalikah botol tersebut digunakan untuk membuat penuh sebuah jerigen kosong?

3. Titik-titik sudut suatu segitiga memiliki koordinat (0,0), (4,3) dan (7,–1), Maka luas segitiga tersebut adalah ...

4. Suatu persegi panjang dapat dipecah-pecah menjadi 5 persegi yang kongruen.

5. Notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau samadengan x. Sebagai contoh $\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor = 2$, $\left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor = -1$, maka hubungan yang benar di antara dua bilangan bulat $s = \left\lfloor \sqrt{2}-\sqrt{3} \right\rfloor$ dan $t = \left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{3} \right\rfloor$ adalah ...

6. Kapasitas tangki bahan bakar suatu mobil adalah 40 liter. Setiap menempuh perjalanan sejauh 100 km, mobil tersebut menghabiskan 7,7 liter bahan bakar. Suatu waktu mobil tersebut digunakan untuk pergi dari Bandung ke Yogyakarta yang jaraknya 428 km. Ketika memulai perjalanan, tangki mobil tersebut terisi penuh bahan bakar. Dalam satuan liter terdekat, banyaknya bahan bakar yang tersisa ketika tiba di Yogyakarta adalah ...

7. Ada satu keluarga terdiri dari Ayah, Ibu, dan tiga orang anak. Ibu lahir pada bulan April. Berapakah peluang ada tepat satu orang anggota lain dalam keluarga tersebut yang lahir juga di bulan April?

8. Pada suatu Kubus *ABCD.EFGH*, ruas garis *AG* adalah diagonal ruang dari kubus tersebut. Ada berapa carakah perjalanan terpendek dari titik sudut *G* ke titik sudut *A* dengan syarat perjalanan tersebut hanya melalui rusuk-rusuk kubus tanpa ada yang dilalui lebih dari satu kali?

9. Misalkan a dan b adalah dua bilangan tertentu. Jika $a + (a + b)b = a(b - a) + x$, maka $x = \ldots$

10. Gaji Yuni dan Yuli pada tahun 2001 sama besarnya. Pada tanggal 1 januari 2002, gaji Yuni naik 15%, sedangkan gaji Yuli naik 10%. Tepat satu tahun kemudian, gaji Yuli naik 15% dan gaji Yuni naik 10%. Siapakah yang gajinya sekarang lebih besar?

BAGIAN B: SOAL URAIAN

1. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi pertaksamaan $\frac{x-1}{x+1} \geq 2$

2. Diketahui T adalah titik tengah suatu segi-6 beraturan dengan panjang sisi 1 satuan.

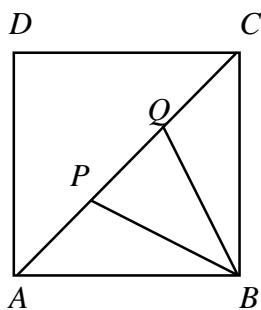
Berapakah panjang TE?

3. Diketahui suatu barisan $U_{(n)}$ = 2.3 + 3.4 + 5.6 + 6.7 + ... + (n + 1)(n +2), sehingga beberapa unsur pertamanya sebagai berikut:

$U_{(1)} = 6$, $U_{(2)} = 18$, $U_{(3)} = 38$, $U_{(4)} = 68$, $U_{(5)} = 110$. Tentukan nilai dari $U_{(100)}$!

4. Diketahui $x_0 = 1$ dan $x_1 = 2$. Sedangkan untuk $x \geq 2$ didefinisikan $x_n = \frac{x_{n-1} + 2x_{n-2}}{2x_{n-1} + x_{n-2}}$ Maka $x_2 + 2x_3 = ...$

5. Dalam suatu kelas, $\frac{3}{5}$ bagian siswanya adalah perempuan. Ke dalam kelas tersebut ditambahkan 5 siswa pria dan 5 siswa perempuan. Sekarang $\frac{3}{7}$ bagian siswanya adalah pria. Berapakah banyak siswa dalam kelas mula-mula?

SELEKSI TINGKAT PROVINSI 2004

BAGIAN A: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Setiap muka sebuah kubus diberi bilangan seperti pada gambar. Kemudian setiap titik sudut diberi bilangan yang merupakan hasil penjumlahan bilangan pada muka-muka yang berdekatan dengannya. Nilai tertinggi bilangan pada titik sudut adalah ...

2. Jika $a + b = 1$, $b + c = 2$, dan $c + a = 3$, maka $a + b + c =$ ...

3. Sebuah jam digital angka-angka yang tertera mulai dari 00:00 sampai dengan 23:59. Jam itu dapat menampilkan Palindrome (bilangan yang dibaca dari depan dan dari belakang sama nilainya, misalnya 12:21, dan 23:32). Dalam satu hari satu malam, banyaknya bilangan Palindrome yang muncul adalah ...

4. Bilangan bulat a dan b, (a,b) adalah bilangan positif yang merupakan sisa $a \times b$ jika dibagi oleh 5. Bilangan yang ditunjukkan oleh $(-3,4)$ adalah ...

5. Bilangan 10-angka terbesar menggunakan empat angka 1, tiga angka 2, dua angka 3, dan satu angka 4, sehingga dua angka yang sama tidak terletak bersebelahan adalah ...

6. Jika selisih dua bilangan adalah 2 dan selisih kuadrat dua bilangan itu adalah 6, maka hasil tambah dua bilangan itu adalah ...

7. Bentuk sederhana dari $\sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{4+\sqrt{15}}$ adalah ...

8. Suatu garis memotong sumbu X di titik $A(a, 0)$ dan memotong sumbu Y di titik $B(0, 3)$. Jika luas segitiga AOB sama dengan 6 satuan luas dengan titik $O(0,0)$, maka keliling segitiga AOB sama dengan ...

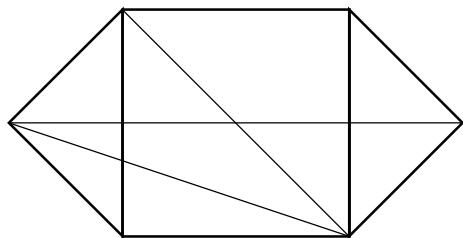
9. Persegi Antimagic ukuran 4×4 adalah susunan persegi panjang dari bilangan-bilangan 1 sampai dengan 16 sedemikian sehingga jumlah dari setiap empat baris, empat kolom, dan dua diagonal utamanya merupakan sepuluh bilangan bulat berurutan. Diagram berikut ini menunjukkan sebagian dari persegi Antimagic ukuran 4×4. Berapakah nilai dari *.

		*	14
	9	3	7
	12	13	5
10	11	6	4

10. $\dfrac{1}{1^2+1}+\dfrac{1}{2^2+2}+\dfrac{1}{3^2+3}+\dfrac{1}{4^2+4}+\ldots+\dfrac{1}{2004^2+2004}=\ \ldots$

BAGIAN B: SOAL URAIAN

1. Enam belas tim sepak bola mengikuti turnamen. Pertama-tama mereka dikelompokkan ke dalam 4 kelompok dengan masing-masing 4 tim di setiap kelompoknya. Di setiap kelompok mereka saling bermain satu sama lain satu kali. Dua tim yang memiliki peringkat teratas selanjutnya maju babak berikutnya yang menggunakan sistem gugur (kalah langsung tereliminasi) sampai ditemukan juaranya. Berapa banyak pertandingan yang berlangsung dalam turnamen tersebut?

2. Pada gambar dibawah, *ABCD* adalah persegi dengan panjang 4 cm. Titik titik *P* dan *Q* membagi diagonal *AC* menjadi tiga bagian sama panjang. Berpakah luas *PDQ*.

3. Untuk bilangan real x didefinisikan $|x|=\begin{cases} x & \text{jika } x\geq 0 \\ -x & \text{jika } x<0 \end{cases}$ cari semua x yang memenuhi $x^2+2|x|-3=0$

4. Sebuah semangka yang beratnya 1 kg mengandung 93% air. Sesudah beberapa lama dibiarkan di bawah sinar matahari, kandungan air semangka itu turun 90%. Berapakah berat semangka sekarang.

5. Untuk bilangan real a dan b sebarang

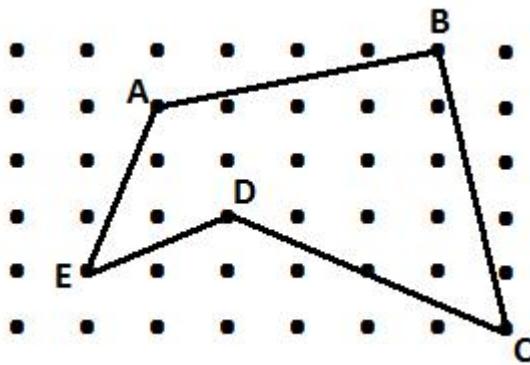
   buktikanlah bahwa: $a^2 + b^2 \geq 2(a + b) - 2$

SELEKSI TINGKAT PROVINSI 2005

BAGIAN A: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Perhatikan segienam berikut. Banyaknya segitiga yang dapat ditemukan pada gambar tersebut adalah ...

2. Bilangan asli terbesar yang memenuhi $\frac{1+2+3+4+...+n}{n} < 2005$ adalah ...

3. Bilangan A adalah bilangan asli terkecil yang merupakan hasil kali dari 3 bilangan prima pertama. Dua buah bilangan antara 200 dan 300 yang memiliki faktor prima tepat sama dengan bilangan A adalah ...

   (Catatan: 10 dan 30 punya faktor prima yang tidak tepat sama, sedangkan 12 dan 18 memiliki faktor prima yang tepat sama).

4. Semua pasangan bilangan asli m dan n yang memenuhi persamaan $\frac{2}{m}+\frac{3}{n}=1$ adalah ...

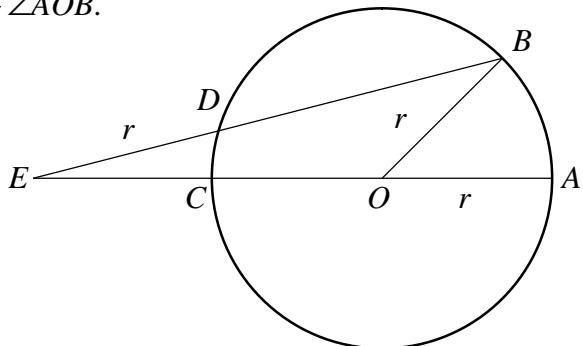
5. Bilangan 45 dapat dinyatakan sebagai selisih dari bilangan kuadrat yakni $a^2 - b^2$ dengan a dan b adalah bilangan asli. Semua pasangan bilangan asli a dan b yang memenuhi persamaan $a^2 - b^2 = 45$ adalah ...

6. 16 dapat dinyatakan sebagai $3x + 7y$ sebab jika x diganti dengan 3 dan y diganti dengan 1 diperoleh 3.3 + 7.1 yang bernilai 16. Tujuh bilangan antara 100 dan 122 yang dapat dinyatakan ke dalam bentuk $6x + 9y$ adalah ...

7. Tiga bilangan bulat membentuk kumpulan data yang berata-rata 10. Banyaknya kombinasi Bilangan yang (sebutkan pula datanya), jika diketahui selisih data terbesar dan terkecilnya tidak lebih dari 4 adalah ...

8. H adalah himpunan yang didefinisikan oleh $\{x \in B | x^2 < 10, x - 1 < 2\}$ dengan B adalah himpunan bilangan bulat. Banyaknya himpunan bagian tak kosong dari H adalah ...

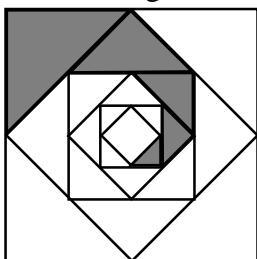
9. Bilangan-bilangan real x yang memenuhi $x^2 - 2x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ adalah ...

10. Dalam menentukan jawab perkalian bilangan 1493 dan 1507, seorang anak mengurangkan langsung 49 dari 2.250.000. Dia sama sekali tidak mengalikan kedua bilangan itu dengan cara panjang. Prinsip Matematika yang digunakan oleh anak tersebut adalah ...

BAGIAN B: SOAL URAIAN

1. Perhatikan gambar berikut. Andaikan Anda diminta untuk mencari luas daerah di dalam kurva *ABCDE*. Jika jarak terdekat dua titik secara mendatar atau vertikal adalah 5 cm, berapakah luas segilima *ABCDE*?

2. Seseorang memiliki sejumlah koin 1000 rupiahan. Setelah diperhatikan dengan seksama, ternyata koin yang dimilikinya terdiri dari 3 macam diantara 4 macam koin sekarang yang masih berlaku (500-an, 200-an, 100-an, dan 50-an). Selidiki dan tentukan berapa banyak kombinasi koin yang mungkin dimiliki oleh anak tersebut.

3. Suatu bilangan x terdiri dari 6 angka dan dimulai dari angka 1. Jika angka pertama dipindahkan dari ujung paling kiri ke ujung paling kanan tanpa mengubah susunan angka-angka yang lainnya, bilangan yang baru terbentuk adalah tiga kali lipat bilangan semula. Berapakah bilangan x tersebut?

4. Pada gambar di bawah, titik O adalah pusat lingkaran yang berjari-jari r. Jika panjang ruas garis ED juga sama dengan r, buktikanlah bahwa $\angle DEC = \frac{1}{3}\angle AOB$.

5. Ada berapa banyakkah pasangan terurut bilangan asli (a, b) dengan syarat $a < b$, dan FPB $(a, b) = 4$ serta KPK $(a,b) = 140$?

SELEKSI TINGKAT PROVINSI 2006

BAGIAN A: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Diberikan segitiga *PQR* siku-siku di *Q*. Jika panjang *PQ* adalah $X + 4$, panjang *QR* adalah $3x + 2$, dan panjang *PR* adalah $3x + 4$, maka panjang *QR* adalah ...

2. Diberikan fungsi kuadrat:

   $f(x) = ax^2 - 3x + c$. Jika $f(1) = 4$ dan $f(2) = 7$, maka $f(-1) = ...$

3. Nomor telepon di Kota Malang terdiri dari enam angka. Banyaknya nomor telepon di kota itu yang habis dibagi 5 adalah ...

4. Perhatikan gambar berikut ini.

   Jika panjang sisi pada persegi yang terbesar adalah 1 satuan panjang dan persegi berikutnya diperoleh dengan cara menghubungkan semua titik tengah pada keempat sisinya, maka jumlah luas yang diarsir adalah ...

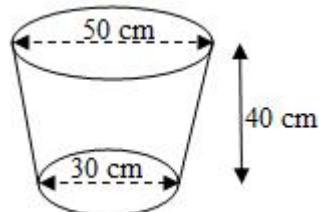
5. Rata-rata nilai matematika dari 24 siswa adalah 7,20. Setelah ditambah nilai dari 2 siswa, rata-ratanya menjadi 7,25. Jika nilai salah satu dari kedua siswa itu adalah 7,65, maka nilai satu siswa yang lain adalah ...

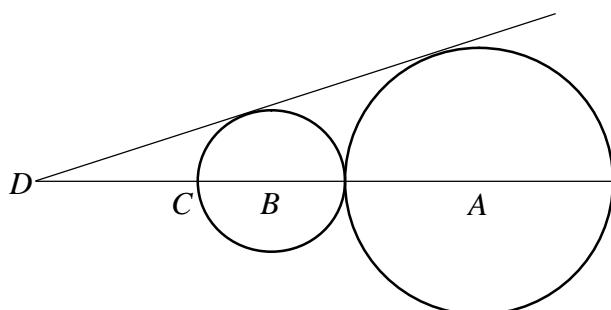
6. Jika Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dari bilangan bulat positip a dan b tidak kurang dari 15, dan kelipatan persekutuan terkecil (KPK)nya tidak lebih dari 32, maka banyaknya pasangan bilangan bulat *a* dan *b* yang mungkin adalah ...

7. Sebuah kebun berbentuk persegi panjang yang berukuran panjang 160 meter dan lebar 50 meter. Di sepanjang tepi kebun dibangun parit dengan lebar yang sama. Jika luas kebun tersebut sekarang menjadi $\frac{3}{4}$ luas kebun mula-mula, maka lebar parit yang dibangun adalah ...

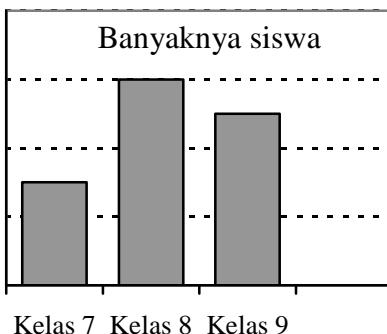
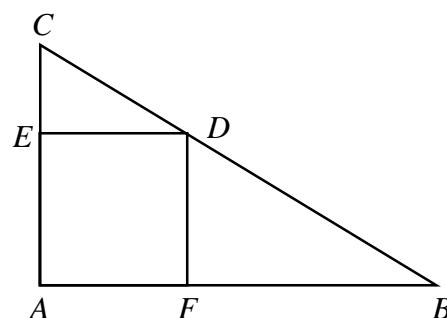
8. Terdapat tiga penjaga taman hiburan A, B, dan C. A berjaga setiap 3 hari, B setiap 4 hari dan C setiap 5 hari. Pada hari Minggu mereka berjaga bersama-sama untuk yang pertama kalinya. Pada saat mereka akan berjaga bersama-sama untuk yang kedua kali, A sakit, sehingga tidak masuk. Pada hari apa mereka dapat berjaga bersama-sama untuk yang berikutnya?

9. Misalkan a dan b bilangan real positif, jika $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=7$ maka $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=...$

10. Nilai dari $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 2005^2 - 2006^2 = ...$

11. Himpunan penyelesaian dari $1-\frac{2(x-5)}{7} \leq 4(3-x)-\frac{1}{7}$, $x \in R$ adalah ...

12. Jika P dan Q keduanya adalah bilangan positif ganjil dan memenuhi $\frac{1}{P}+\frac{4}{Q}=\frac{3}{5}$ maka selisih P dan Q adalah ...

13. Diketahui $y = x^2 + 7x + 2$ dan garis $y = 2x + 8$ saling berpotongan di titik A dan titik B.

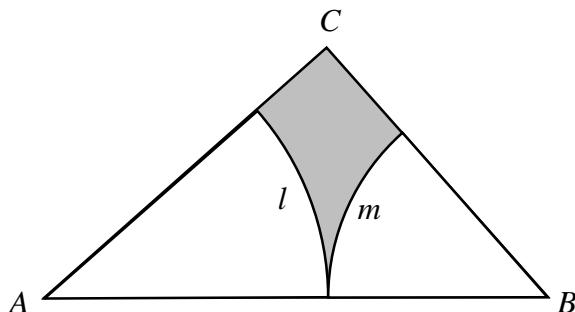
    Jarak antara titik A dan titik B adalah ...

14. Sebuah ember terbuat dari seng seperti tampak pada gambar. Luas seng yang digunakan untuk ember tersebut adalah ...

15. Dari gambar di atas diketahui bahwa jari-jari lingkaran kecil adalah 3 cm dan jari-jari lingkaran besar adalah 5 cm. Panjang CD adalah ... cm.

16. Pak Rahman memiliki satu kantong permen yang akan dibagikan kepada anak-anak. Jika setiap anak diberi dua permen, maka di dalam kantong Pak Rahman tersisa empat permen. Namun jika setiap anak diberi tiga permen, maka ada dua anak yang tidak mendapat bagian dan satu anak yang mendapatkan dua permen. Banyak permen Pak rahman di dalam kantong sebelum dibagikan adalah ...

17. Lima orang pemuda pergi berekreasi menggunakan sebuah mobil. Mobil yang digunakan memiliki dua tempat duduk di depan (termasuk untuk pengemudi) dan tiga tempat duduk di belakang. Dari kelima pemuda tersebut hanya dua orang yang bisa menjadi pengemudi. Banyak cara mereka duduk di mobil adalah ...

18. Jika n adalah bilangan asli, maka bentuk paling sederhana dari perkalian

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$ adalah ...

19. Gambar di samping menunjukkan banyaknya siswa dari kelas 7, kelas 8, dan kelas 9 yang mengikuti kegiatan ekstra kurikuler sepak bola. Diketahui bahwa banyak siswa yang mengikuti kegiatan tersebut semuanya adalah 28 orang. Dua orang siswa dipilih secara acak untuk menjadi ketua dan wakil ketua. Jika wakil ketua terpilih adalah siswa kelas 7, maka peluang terpilihnya ketua yang berasal dari kelas 9 adalah ...

20. Pada gambar di samping, segitiga ABC adalah siku-siku di A dan $AEDF$ adalah suatu persegi. Jika panjang AB = 6 cm dan AC = 3 cm, maka luas daerah segitiga CDE adalah ... cm^2

BAGIAN B: SOAL URAIAN

1. Sebuah cerobong asap berbentuk kerucut terpancung, jari-jari alas cerobong tersebut 5 meter, jari-jari atas 4 meter, dan tinggi 20 meter. Cerobong asap tersebut akan dicat, biaya mengecat permeter persegi adalah Rp 5.000,-. Hitung biaya pengecatan cerobong asap itu!

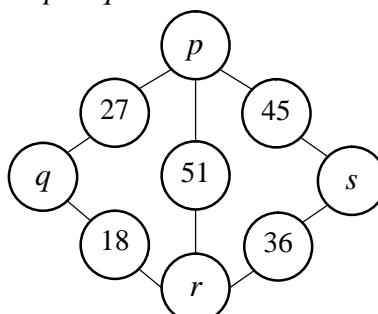
2. Tentukan m agar persamaan $[2x^2 + 2mx - (m + 1)]\ (x^2 + mx + 1) = 0$ mempunyai tepat dua solusi real!

3. Diberikan segitiga siku-siku samakaki ABC dengan sudut siku-siku di C. Luas segitiga ABC adalah 2 satuan luas. Busur l adalah busur lingkaran yang berpusat di A dan membagi segitiga menjadi dua bagian yang sama luasnya. Busur m adalah busur lingkaran yang berpusat di B dan menyinggung busur l di titik yang terletak di AB. Tentukan luas daerah yang diarsir.

4. Ucok bermain menyusun batang-batang korek api seperti tampak pada gambar berikut. Apabila susunan batang korek api yang dibuat Ucok dilanjutkan, tentukan banyak batang korek api yang diperlukan untuk membuat susunan ke-20?

5. Indonesia akan mengirim delegasi Olimpiade Sains Internasional (OSI) tingkat SMP pada tahun 2006. Delegasi ini terdiri atas tiga siswa SMP yang harus dipilih secara acak dari 10 kandidat yaitu enam siswa bidang Sains dan empat siswa bidang Matematika. Berapa peluang terpilihnya delegasi OSI yang terdiri 2 siswa dari bidang Sains dan 1 siswa dari bidang Matematika?

SELEKSI TINGKAT PROVINSI 2007

BAGIAN A: SOAL PILIHAN GANDA

1. Banyak bilangan prima antara 10 dan 99 yang tetap merupakan bilangan prima jika kedua digitnya dipertukarkan adalah ...

   a. 9 b. 10 c. 11 d. 12 e. 13

2. Diberikan dua bilangan bulat yang berjumlah 37. Jika bilangan yang lebih besar dibagi dengan bilangan yang lebih kecil, maka hasil baginya adalah 3 dan sisanya 5. Selisih kedua bilangan tersebut adalah ...

   a. 3 b. 5 c. 8 d. 21 e. 29

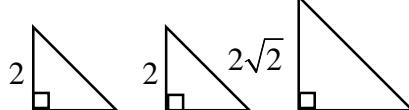
3. Dua dadu bersisi enam diberi nomor baru pada setiap sisinya. Dadu pertama diberi nomor 1, 1, 2, 3, 3, 3 dan dadu kedua diberi nomor –1, –1, –1, –2, –2, –3. Jika kedua dadu dilempar bersamaan, maka peluang terjadinya jumlah bilangan pada kedua sisi atas dadu bernilai positif adalah ...

   a. $\frac{1}{4}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{2}{3}$ d. $\frac{3}{4}$ e. $\frac{4}{5}$

4. Jika sistem persamaan $x^7y^5 = r$ dan $x^4y^3 = s$ dengan x, y, r, dan s adalah bilangan positif mempunyai penyelesaian $x = r^as^b$ dan $y = r^cs^d$, maka hasil dari $a + b + c + d$ adalah ...

   a. 19
   b. 2
   c. 1
   d. $\frac{7}{12}$
   e. $\frac{1}{2}$

5. Jumlah dari setiap tiga bilangan asli yang terletak pada garis lurus pada Gambar 1 selalu sama. Nilai dari $p + q + r + s$ adalah ...

   a. 63
   b. 69
   c. 71
   d. 84
   e. 90

6. Diketahui a, b, c, dan d adalah bilangan asli. Jika c habis dibagi a, dan d habis dibagi b, maka pernyataan berikut:

   i. cd habis dibagi ab

   ii. $c + d$ habis dibagi $a + b$

   iii. cd habis dibagi a

   iv. bc habis dibagi ab

   v. d^c habis dibagi b^a

   yang selalu benar adalah ...

   a. hanya (i)

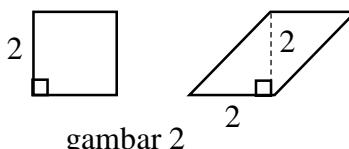
   b. hanya (i), (iii), dan (iv)

   c. semuanya, kecuali (ii)

   d. semuanya, kecuali (v)

   e. semuanya

7. Tiga segitiga samakaki, satu persegi (bujursangkar), dan satu jajargenjang dengan ukuran seperti pada gambar 2 dapat disusun menjadi satu persegi. Keliling persegi yang diperoleh adalah ...

   a. 8

   b. 12

   c. 16

   d. $8\sqrt{2}$

   e. $16\sqrt{2}$

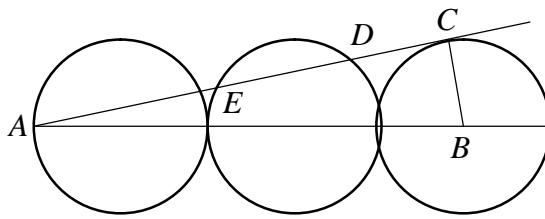
gambar 2

8. Final lomba renang wanita 400 meter diikuti oleh 4 orang finalis yaitu Anita, Bonita, Cantika, dan Dita. Diperoleh informasi bahwa Bonita selalu kalah bartarung dengan Anita dan Cantika, namun selalu menang bertarung dengan Dita. Jika dalam perlombaan tersebut akan ditentukan peraih medali emas, perak dan perunggu, maka kemungkinan susunan dari penerima medali adalah ...

   a. 6 b. 10 c. 12 d. 13 e. 14

9. Jumlah koefisien dari hasil penguraian $(19x - 20y)^{2007}$ adalah ...

   a. $19^{2007} - 20^{2007}$

   b. -1

   c. 0

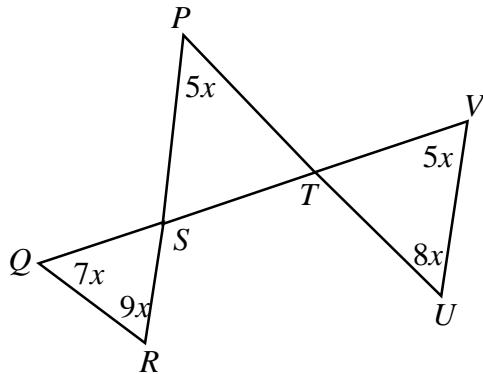
   d. 1

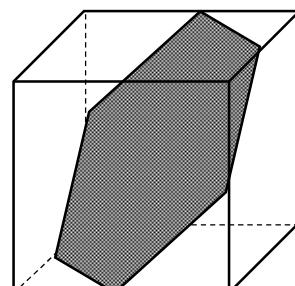
   e. $19^{2007} + 19^{4014}$

10. Tiga lingkaran kongruen saling bersinggungan seperti tampak pada gambar 3. Garis *AB* melalui ketiga titik pusat lingkaran dan garis *AC* merupakan garis singgung lingkaran yang berpusat di *B*. Jika diketahui jari-jari lingkaran adalah 3 cm. maka panjang *DE* adalah ...

a. $2\frac{2}{3}$ cm

b. $3\frac{1}{3}$ cm

c. $3\frac{2}{3}$ cm

d. $4\frac{4}{5}$ cm

e. . $4\frac{5}{6}$ cm

BAGIAN B: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Besar sudut *TUV* pada gambar 4 adalah ... °.

2. Didefinisikan $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots\cdot 2\cdot 1$. Bilangan bulat n yang memenuhi $n! = 2^{10} \,.\, 3^5 \,.\, 5^2 \,.\, 7 \,.\, 11$ adalah ...

3. Semua pasangan bilangan bulat x dan y yang memenuhi persamaan $y^2(x + 1) = 1576 + x^2$ adalah ...

4. Seorang nelayan menaiki perahu motor yang melaju dengan kecepatan konstan 50 km/jam melawan arus sungai yang kecepatan airnya konstan. Di tengah perjalanan tanpa disadari pelampungnya terjatuh ke air dan terbawa arus sungai. Dua puluh menit kemudian ia baru mengetahuinya, dan segera berbalik arah untuk mencarinya. Jika ia berhasil menemukannya pada posisi 30 km ke arah hilir dari tempatnya berbalik tadi, maka laju arus sungai tersebut adalah ... km/jam.

5. Diketahui fungsi bilangan real $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$, untuk $x \neq 1$. Nilai dari:

   $f(2007) + f(2006) + \ldots + f(3) + f(2) + f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{3}\right) + \ldots + f\left(\dfrac{1}{2007}\right)$ adalah

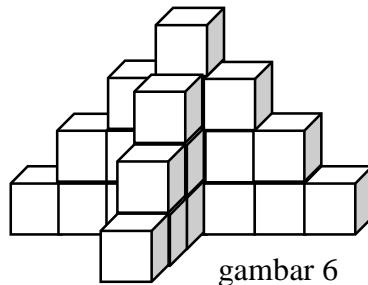
6. Hasil dari penjumlahan: $\dfrac{3}{20} + \dfrac{6}{60} + \dfrac{9}{126} + \dfrac{12}{224} + \ldots. + \dfrac{96}{24.192}$ adalah ...

7. Suatu barisan berbentuk a, b, $a + b$, $a + 2b$, $2a + 3b$, $3a + 5b$, ... (untuk a dan b bilangan asli). Jika suku ke-7 dari barisan tersebut adalah 18, maka rata-rata dari 18 suku pertama barisan tersebut adalah ...

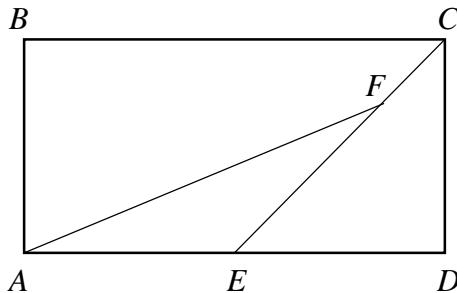
8. Sebuah printer menomori semua halaman sebuah buku mulai dari nomor 1 dan seluruhnya menggunakan 3201 digit. Banyak halaman buku tersebut adalah ...

9. Sebuah kubus padat terouat dari bahan yang lunak akan dibelah mengikuti segienam beraturan seperti tampak pada gambar 5. Semua titik sudut segienam tepat terletak di tengah rusuk-rusuk kubus. Jika rusuk kubus adalah a' cm, maka luas segienam tersebut adalah ... cm^2.

gambar 5

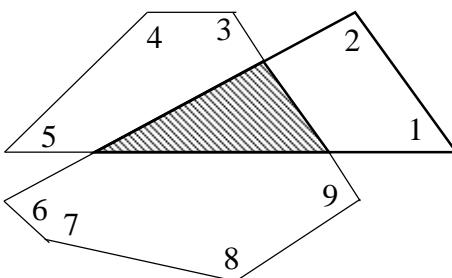
10. Kode sebuah kartu ATM diketahui berupa bilangan lima digit dengan ciri-ciri berikut:

    - digit puluhan adalah dua kali lipat digit ribuan,

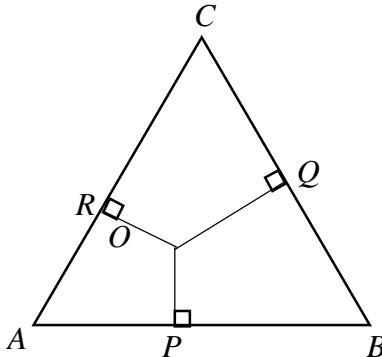
- jika digit ratusan dan satuan dipertukarkan maka nilai bilangan tersebut tidak berubah, dan
- digit puluh-ribuan adalah tidak nol.

Jika pemilik kartu ATM tersebut lupa kodenya, tetapi ingat dengan ciri-ciri tersebut maka peluang ia dapat langsung menebaknya dengan benar adalah....

BAGIAN C: SOAL URAIAN

1. Sebuah tugu akan dibangun dengan menumpuk kubus-kubus beton yang rusuknya 50 cm, seperti tampak pada gambar 6. Antar sisi-sisi kubus yang berdempetan dan sisi kubus dengan lantai akan direkat dengan semen setebal 1 cm.

gambar 6

   Jika tinggi tugu yang diinginkan adalah 51,51 m, berapa banyak kubus beton yang diperlukan?. Jika semua permukaan kubus beton yang tampak dari tugu tersebut dicat dengan harga pengecatan Rp 6.000,00 per meter persegi, tentukan besar biaya yang diperlukan!

2. Suatu kebun berbentuk persegi panjang seperti gambar 7. Diketahui ukuran AB = 15 m dan BC = 30 m. Seekor kucing berada pada titik A dan seekor tikus berada pada titik E, yang merupakan titik tengah garis AD. Tikus berlari dengan kecepatan 3 m/detik sepanjang garis lurus menuju titik C, sedangkan kucing berlari dengan kecepatan 5 m/detik sepanjang suatu garis lurus sedemikian sehingga akan bertemu dengan tikus di titik F. Diketahui kucing dan tikus mulai berlari pada saat yang bersarmaan, dan di titik F kucing berhasil menerkam tikus. Dalam berapa detik kucing berhasil menerkam tikus (bulatkan sampai 2 angka desimal)?

SELEKSI TINGKAT PROVINSI 2008

BAGIAN A: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Jika $A = 1 + 11 + 111 + 1111 + ... + \underbrace{111........111}_{2008\ angka}$, maka 5 angka terakhir dari A adalah ...
2. Seorang peternak memiliki 114 hewan peliharaan yang terdiri dari kuda, sapi, kambing, ayam dan bebek. Banyak hewan berkaki empat adalah 8 lebih sedikit dibandingkan hewan berkaki dua. Sedangkan sapi miliknya adalah 3 lebih banyak dibanding kuda, tetapi 20 lebih sedikit dibanding kambing. Di samping itu ayam miliknya adalah 13 lebih sedikit dibanding bebek. Banyak sapi dan ayam milik peternak tersebut adalah ...

3. Perhatikan gambar 1. Hasil penjumlahan sudut:

   $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 + \angle 9 = \ldots$

4. Sebelas orang anggota tim sepakbola ditimbang secara berurutan. Setelah dua orang selesai ditimbang, dihitung rata-ratanya. Begitu pula ketika orang ketiga ditimbang, rata-rata baru dihitung kembali. Demikian seterusnya. Diketahui nilai rata-rata ini selalu meningkata satu kilogram sampai semua pemain selesai ditimbang. Selisih berat badan pemain yang paling berat dengan pemain yang ditimbang pada urutan ketiga adalah ... kilogram

5. Nilai x yang memenuhi persamaan $4x(3^{2006} + 1) = 3^{2009} - 3^{2007} + 24$ adalah ...

6. Jika $\dfrac{3a - 2b + 4c}{4a - b + c} = 1$, maka nilai $\dfrac{6c}{a + b}$ adalah ...

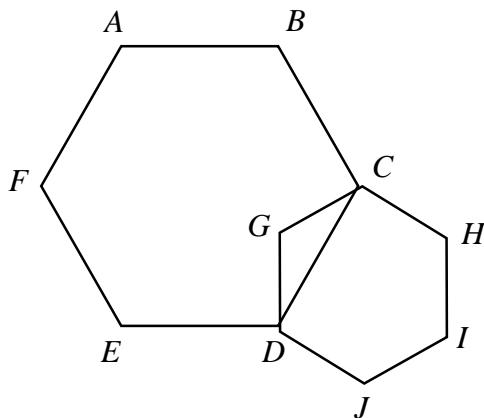
7. Perhatikan ΔABC pada gambar. Diketahui BAC = 135°, titik D terletak di tengah AC, dan titik E di tengah AB. Jika panjang $AC = 10\sqrt{2}$ cm, dan AB = 14 cm, maka luas daerah $BCDE$ adalah ... cm^2

8. Perhatikan gambar 3. Diketahui ΔABC adalah samasisi dengan panjang sisi 16 cm. Titik O terletak di dalam ΔABC. Dari titik O dibuat ruas garis OP, OQ, dan OR yang tegak lurus terhadap sisi-sisi ΔABC. Jumlah panjang ruas garis $OP + OQ + OR$ adalah ... cm.

9. Angka satuan dari

   $1^{2008} + 3^{2008} + 5^{2008} + 7^{2008} + 11^{2008} + 13^{2008}$ adalah …..

10. Nia akan berulang tahun dalam waktu dekat. Karena keterbatasan biaya, dia hanya mampu mengundang 10 dari 15 orang temannya. Diantara teman-temannya, terdapat sahabat dekatnya, vaitu: Ade, Dea, Ani, dan Ina. Nia memutuskan bahwa Ade dan Dea harus diundang. Tetapi, Ani dan Ina tidak mungkin diundang bersama-sama karena mereka sedang berselisih faham. Banyak cara menentukan susunan nama-nama yang akan diundang pada acara ulang tahun tersebut adalah ...

11. Dua puluh ubin persegi yang kongruen akan disusun dalam 2 baris. Masing-masing baris berisi 10 ubin. Diantara ubin-ubin tersebut terdapat 9 ubin bergambar bunga. Banyak cara menyusun ubin tersebut agar sesama ubin bergambar bunga tidak saling bersinggungan adalah ...

    (Catatan: dua ubin dikatakan bersinggungan jika ada salah satu sisi yang saling berimpit)

12. Diketahui:

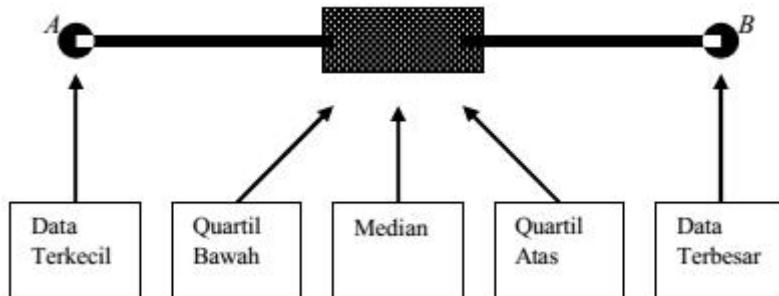
$$A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2} + ... + \frac{1}{\sqrt{9999}+100}$$

    Bilangan kuadrat terdekat dengan A adalah ...

13. Perhatikan gambar 4. Perbandingan luas daerah segienam beraturan *CHIJDG* dan luas daerah segienam beraturan *ABCDEF* adalah ….

14. Pak Asari akan mengikat semua buku yang dimilikinya. Ketika banyak buku dalam setiap ikatan sama dengan 12, ada 2 buku yang tidak terikat. Dia mengubah banyak buku dalam setiap ikatan. Sekarang dalam setiap ikatan terdapat tepat 9 buku, ternyata juga masih bersisa 2 buku yang tidak terikat. Seteiah dia mengikat 7 buku dalam setiap ikatan, tidak ada lagi buku yang tersisa. Jika banyak buku yang dimiliki pak Asari berkisar antara 100 dan 200, maka banyak buku yang dimiliki pak Asari adalah ...

15. Perhatikan bahwa 1 + 2 + 3 + 45 + 6 + 78 + 9 = 144. Banyak cara yang mungkin dilakukan untuk menghasilkan 144 dengan hanya menggunakan bilangan-bilangan yang dibentuk dari angka- angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9 secara berurutan dari kiri ke kanan dan hanya menggunakan operasi penjumlahan adalah ...

16. Diketahui a dan x adalah dua bilangan bulat positif yang memenuhi persamaan

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}=\frac{1}{x^2-2x}$$

Nilai terkecil dari $a + x$ adalah ....

17. $f(x)=\dfrac{2x-4}{x}$, $x \neq 0$ dan x bilangan real, maka $f^{2009}(6)$ = ...

Catatan: Notasi $f^2(x) = f(f(x))$, notasi $f^3(x) = f(f(f(x)))$, dan seterusnya.

18. Sebuah *boxplot*, seperti pada gambar 5, biasanya digunakan untuk menampilkan data yang menunjukkan nilai kuartil bawah, median, kuartil atas, dan rentangnya.

Pada ruas garis AB yang panjangnya 10 cm, titik A digunakan untuk menyatakan data bernilai 0, titik B untuk data bernilai 100. Jika diberikan data sebagai berikut: 65, 70, 67, 82, 71, 25, 83, 78, 58, 72, 94, 66, 86, 73, 71, 31, 71, 87, 65, 76, 86, 66, 98, 74, 84, 96, 100, 73, maka gambar boxplot data tersebut pada garis AB adalah ...

19. Pada suatu perusahaan, ada 3 lowongan pekerjaan yang disediakan hanya untuk pekerja pria, 5 lowongan pekerjaan hanya untuk pekerja wanita, dan 4 Iowongan pekerjaan untuk pekerja pria atau wanita. Jika terdapat 20 pelamar dengan komposisi 8 wanita dan 12 pria, maka ...

20. Diketahui empat persamaan garis berikut

    $ax + by = c$

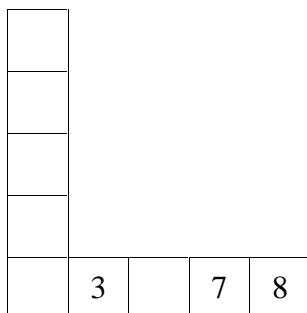
    $dx + ey = f$

    $px + qy = r$

    $sx + ty = u$

    Agar terbentuk persegi panjang, hubungan yang mungkin antara a, b, c, d, e, f, g, p, q, r, s, t, dan u adalah ....

BAGIAN B: SOAL URAIAN

1. Pasangan (x, y, z) , $x, y, z \in$ Z, memenuhi persamaan berikut:

   $2x + y + xy = 2$

   $y + 3z + yz = 7$

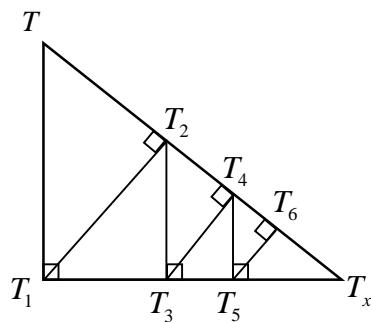
   $2x + 3z + xz = 30$

   berapakah nilai dari $\sqrt{x^3 + 10y^3 + z^3}$

2. Balok pejal *ABCD.EFGH* berukuran 15 cm × 10 cm × 6 cm. Titik *P* terletak pada rusuk *AB* sedemikian *AP* = 3 cm. Seekor cicak yang ada di sudut *G* akan menangkap nyamuk yang ada di *P* cm dengan merayap pada permukaan balok. Jika kecepatan cicak bergerak 2,5 cm/detik berapa waktu tercepat yang dibutuhkan cicak agar dapat melahap nyamuk?

3. Hasil kali 46 bilangan bulat sama dengan 1. Mungkinkah jumlah bilangan-bilangan bulat yang memenuhi syarat tersebut sama dengan 0?

4. Angka 1, 2 ,3, 4, 5, 6, 7, 8, dan9 akan ditempatkan ke masing-masing kotak pada gambar berikut sehingga jumlah mendatarnya sama dengan jumlah vertikalnya. A adalah bilangan 5 angka yang dibentuk dengan cara membaca secara vertikal dari atas ke bawah masing-masmg bilangan di dalam kotak tersebut. Berapa banyak bilangan A yang mungkin terbentuk?

gambar 6

5. Untuk setiap pasangan bilangan asli *a* dan *b*, didefinisikan $a \otimes b = a - b + ab$. Bilangan asli *x* dikatakan mitra bilangan asli *n* jika terdapat bilangan asli *y* yang memenuhi $x \otimes y = n$ Sebagai contoh, 7 adalah mitra dari 13 karena terdapat bilangan asli 1 sehingga $7 \otimes 1 = 7 - 1 + 7.1 = 7 - 1 + 7 = 13$. Tentukan semua mitra dari 2008!

SELEKSI TINGKAT PROVINSI 2009

BAGIAN A: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Banyak bilangan bulat berbeda yang merupakan penjumlahan dari tiga bilangan berbeda dalam {5, 9, 1, 17, ... , 41} adalah ...

2. Nilai dari $2009^2 - 2008^2 + 2007^2 - 2006^2 + 2005^2 - \ldots + 3^2 - 2^2 + 1^2$ adalah ..

3. dalam sebuah kantong terdapat 5 bola warna putih, 2 bola warna hijau, dan 3 bola warna merah. Akan diambil 3 bola secara satu persatu dengan pengembalian artinya bila bola sudah diambil dikembalikan ke dalam kantong tersebut. Peluang ketiga bola yang terambil berwarna hijau adalah ...

4. Bentuk sederhana dari:

$$\sqrt{\left(\frac{17x^2-71x-12}{2x^2-7x+3}:\frac{17x^2-88x+15}{2x^2+7x-4}:\frac{3x^2-48}{x^2-2x-3}\right)\times\frac{24x^3-120x^2}{2x+2}}$$

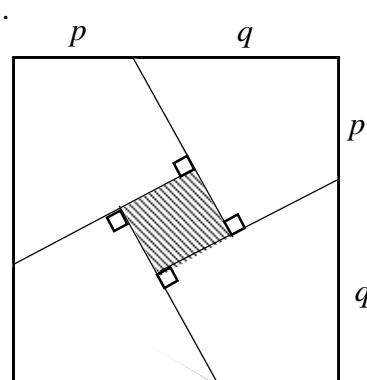
5. Bilangan palindrom adalah bilangan yang dibaca dari kiri dan kanan selalu sama, seperti 131. Banyak bilangan ganjil positip yang bersifat palindrom dan terdiri dari sembilan angka serta dua kali bilangan tersebut juga merupakan bilangan palindrom adalah ...

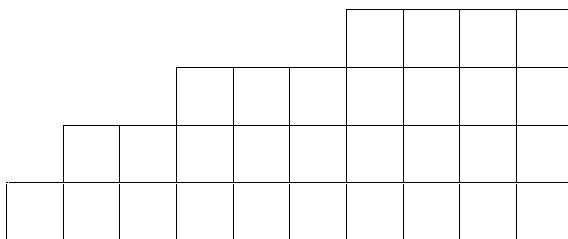
6. Tes matematika diberikan kepada tiga kelas dengan siswa yang berjumlah 100 orang. Nilai rata- rata kelas pertama, kedua, dan ketiga masing-msing adalah 7, 8, dan $7\frac{1}{2}$. Jika banyak siswa pada kelas pertama 25 orang, dan banyak siswa pada kelas ketiga 5 orang lebih banyak dari jumlah siswa kelas kedua, maka nilai rata-rata seluruh siswa tersebut adalah …

7. Jika $\frac{(y-x)^2}{z-x}-\frac{(y-z)}{z-x}=y-z$, dan $x \neq z$, maka nilai y sama dengan ...

8. Perhatikan gambar 1.

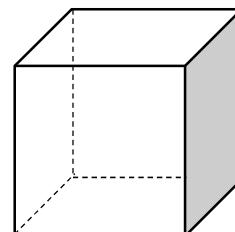
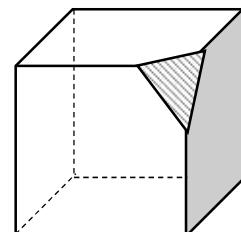
   Jika segitiga TT_1T_x siku-siku sama kaki dan panjang TT_1 = 8 cm, maka $TT_1 + T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_4 + T_4T_5 + \ldots$ adalah ...

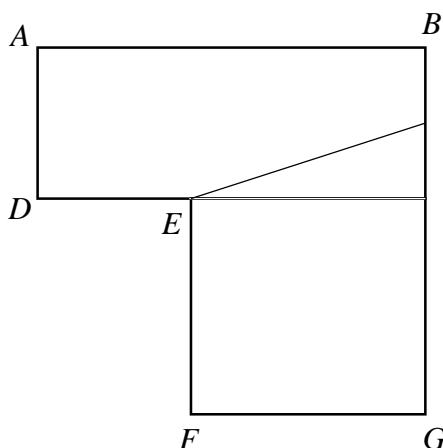
9. Diketahui dua persamaan:

$$(i).\ 6-\cfrac{5}{5-\cfrac{4}{5-\cfrac{4}{5-\cfrac{4}{\vdots}}}}=x \qquad (ii).\ 9-\cfrac{8}{8-\cfrac{7}{8-\cfrac{7}{8-\cfrac{7}{\vdots}}}}=x$$

Nilai x yang memenuhi kedua persamaan tersebut adalah ...

10. Misalkan A dan B adalah titik pada bidang datar yang jaraknya adalah 2. Jika S merupakan himpunan dari titik-titik P sehingga nilai $(PA)^2 + (PB)^2$ paling besar adalah 10, maka luas daerah dari S adalah ...

11. Suatu himpunan A beranggotakan sebelas bilangan bulat positip yang berbeda. Jika rata-rata dari kesebelas bilangan tersebut adalah 12, maka bilangan bulat positip terbesar dalam A yang mungkin adalah ...

12. Semua bilangan real x yang memenuhi persamaan $\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x}=1$ adalah ...

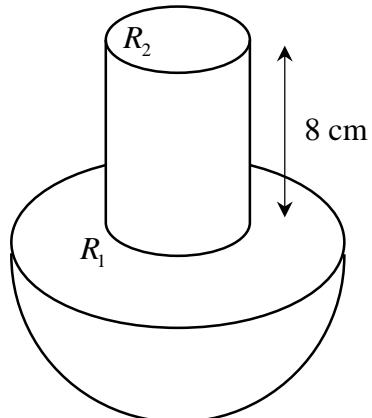
13. Perhatikan gambar 2, yaitu 4 buah layang-layang kongruen yang memuat pada persegi dan ternyata masih tersisa daerah persegi yang diarsir. Jika panjang $p = 3\sqrt{2}$ cm, dan $q = 5\sqrt{2}$ cm, maka luas daerah yang diarsir adalah ...

14. Suatu bilangan dikatakan “berprisque” jika bilangan tersebut merupakan bilanan asli yang didapat oleh suatu bilangan prima dan suatu bilangan kuadrat sempurna (contoh 3 adalah bilangan berprisque, tetapi 5 bukan bilangan berprisque). Banyak bilangan berprisque yang kurang dari 100 adalah ...

15. Banyak persegi pada gambar 3 adalah ...

16. Perhatikan gambar 4(a) sebagai kubus sempurna dan gambar 4(b) merupakan kubus yang sama dengan gambar 4(a) dengan salah satu titik sudut dipotong dengan potongan berbentuk limas. Jika panjang rusuk kubus 6a cm dan panjang rusuk tegak limas $2\frac{1}{3}a$ cm. maka volum bangun baru adalah ...

(*a*)

(*b*)

17. Banyak cara untuk menyatakan bilangan 4725 sebagai perkalian dari dua bilangan ganjil yang lebih besar dari 1 adalah ...

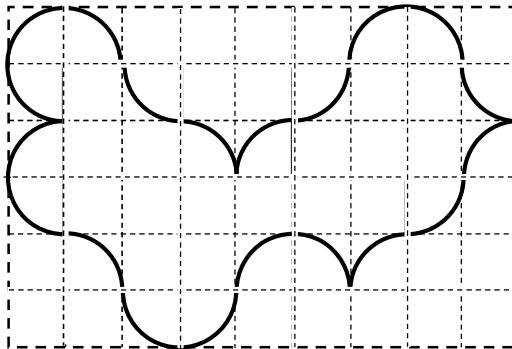
18. Banyak bilangan bulat positif n yang memenuhi bilangan kuadrat sempurna $n^4 + n^3 + 1$ adalah ...

19. Perhatikan gambar 5.

Bangun *ABCDEG* adalah menunjukkan keadaan sebuah kamar. Keadaan yang sebenarnya $AD = DE$, $AB = 28$ meter, dan $EF = 18$ meter serta luas kamar 624 m^2 . Jika sebuah penyekat dibuat dari E sampai C yang membagi luas kmar menjadi dua bagian yang sama luas, maka jarak dari C ke G adalah ...

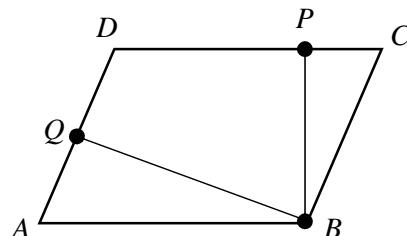
20. Diketahui bilangan bulat $x_1 = 34$, $x_2 = 334$, $x_3 = 3334$,..dan $x_n = \underbrace{333......334}_{n}$.

Banyaknya angka 3 pada bilangan $9_{(x670)^3}$ adalah ...

BAGIAN B: SOAL URAIAN

1. Perhatikan gambar 6!

Gambar 6 merupakan bangun ruang yang terdiri dari tabung berjari-jari R_2 dan belahan bola padat berjari-jari R_1. Tinggi tabung 8 cm, jari-jari bola R_1 = 10 cm dan jari-jari tabung R_2 = 5 cm. Hitunglah luas permukaan dari bangun ruang tersebut!

2. Carilah semua bilangan bulat positif n sehingga $\frac{1}{n} = 0,abcabcabc.... = 0,\overline{abc}$ (merupakan bilangan desimal berulang tak berhenti) dengan *a*, *b*, dan *c* adalah angka-angka yang berbeda dari 0 sampai dengan 9!

3. Diketahui suatu fungsi $f(x) = an^3 + bn^2 + cn + d$. Jika $f(2) = 5$, $f(4) = 30$, $f(6) = 91$, dan $f(8) = 208$, maka hitunglah jumlah angka angka dari $f(2009)$!

SELEKSI TINGKAT PROVINSI 2010

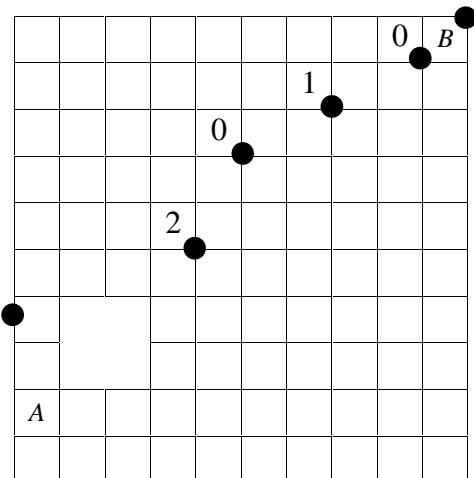
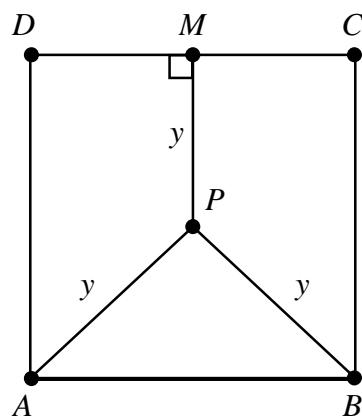
BAGIAN A: SOAL ISIAN SINGKAT

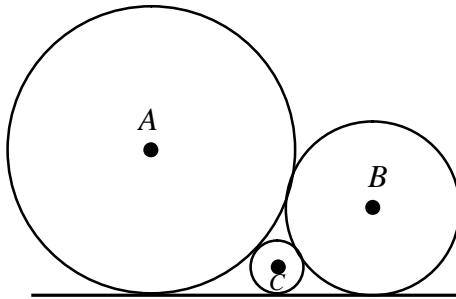
1. Jika $f(x) = 3x^2 + 18x + 28$ dan $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + (2009)^2 + (2010)^2 = A$, maka $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(2010) =$ ....

2. Jika $p = \dfrac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{13}}$, dan $q = \dfrac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{13}}$, maka nilai dari $p^2 + pq + q^2$ adalah

3. Diberikan suatu barisan bilangan 1, 5, 6, 25, 26, 30, 31 , ... yang terdiri dari barisan bilangan pemangkatan 5 atau jumlah bilangan-bilangan berbeda hasil pemangkatan 5. Perhatikan bahwa $1 = 5^0$, $6 = 1 + 5$, $31 = 1 + 5 + 5^2$, ... Nilai suku ke-100 pada barisan tersebut adalah …

4. Bilangan asli terkecil yang tidak sama dengan satu yang selalu dapat membagi habis bilangan yang terdiri dari 6 angka *abcabc* adalah...

5. Perhatikan gambar berikut Jika setiap persegi kecil memiliki luas 1 satuan/luas daerah tertutup yang dibatasi oleh busur-busur lingkaran di bawah adalah ...

6. Perhatikan gambar jajaran genjang di samping, Jika sudut *BPC* dan *BQD* siku-siku, dan *BP* = 4 cm, *DP* = 4 cm dan *DC* = 7 cm, tentukan panjang *BQ*.

7. Tentukan banyaknya cara membagikan 10 permen identik kepada tiga orang sedemikian sehingga setiap orang sedikitnya mendapatkan satu permen.

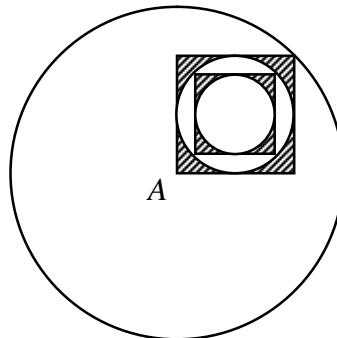
8. Gambar di bawah ini memberikan beberapa altematif jalan dari *A* ke *B*, Sisi-sisi masing-masing blok (persegi) menyatakan jalan dengan panjang satu satuan yang sama. Tentukan banyaknya rute terpendek dari titik *A* ke titik *B* yang melalui titik-titik 2, 0, 1, 0 secara berurutan.

9. Dipunyai persegi *ABCD* dengan luas x^2, titik *P* terletak dalam persegi seperti tampak pada gambar dengan jarak $PA = PB = PM$. Jika jarak tersebut dinyatakan dengan *y*, nyatakan *y* dalam *x*.

10. Jika $3996 = p^s q^t r^u$, dengan *p*, *q*, *r* adalah bilangan prima, maka nilai $p + q + r + s + t + u$ adalah ...

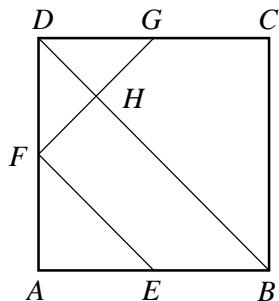
BAGIAN B: SOAL URAIAN

1. Tentukan bilangan asli terbesar yang jika membagi bilangan-bilangan 1723, 2010, dan 5741 selalu memberikan sisa 1 adalah ....

2. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - px + q + 1 = 0$ adalah real dan lebih besar 1, Berapakah nilai $p + q$?

3. Dipunyai panjang jari-jari lingkaran A = 8 cm dan jari-jari lingkaran B = 2 cm. Tentukan panjang jari-jari lingkaran C.

4. Sebuah tabel permainan angka berukuran 4×4, setiap sel akan diisi dengan bilangan 1 atau –1 sedemikian sehingga jumlah setiap baris dan kolom adalah 0. Ada berapa banyak cara untuk menyusun tabel permainan yang dimaksud?

5. Sejumlah siswa mengikuti ujian seleksi OSN tahun 2010 tingkat provinsi, ternyata didapatkan data bahwa sebanyak 64 siswa yang lulus adalah wanita, peserta yang lulus adalah laki-laki, Sedangkan jumlah peserta laki-laki lulus adalah 4 kali lebih banyak dari pada jumlah peserta laki-laki yang tidak lulus, serta jumlah peserta yang tidak lulus adalah 40 siswa. Berapa persenkah jumlah peserta wanita yang mengikuti ujian seleksi tersebut?

SELEKSI TINGKAT PROVINSI 2011

BAGIAN A: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Jika x adalah jumlah 99 bilangan ganjil terkecil yang lebih besar dari 2011 dan y adalah jumlah 99 bilangan genap terkecil yang lebih besar dari 6, maka $x + y = \dots$

2. Jika f adalah fungsi sehingga $f(xy) = f(x - y)$ dan $f(6) = 1$, maka $f(-2) - f(4) =$..

3. Jika bilangan bulat x dan y dibagi 4, maka bersisa 3. Jika bilangan $x - 3y$ dibagi 4, maka bersisa ...

4. Perhatikan gambar di samping. Suatu lingkaran berjari-jari 2 satuan berpusat di A. Suatu persegi memiliki titik sudut di A dan satu titik sudut yang lain di lingkaran. Di dalam persegi tersebut terdapat lingkaran yang menyinggung keempat sisi persegi. Di dalam lingkaran terdapat persegi yang keempat titik sudutnya berada di lingkaran tersebut. Di dalam persegi ini terdapat lingkaran yang menyinggung keempat sisi persegi. Luas daerah yang diarsir sama dengan ...

A

5. Banyak bilangan 3 digit (angka) yang terdiri dari angka-angka 0, 2, 3, 5, 7, 8 yang lebih dari 243 dan kurang dari 780 adalah ...

6. Diketahui Budi adalah seorang siswa laki-laki dan Wati adalah seorang siswa perempuan. Saat ini mereka duduk di kelas IX pada suatu sekolah. Mereka mencatat banyak siswa kelas IX di sekolah mereka. Wati mencatat, $\frac{3}{20}$ dari total siswa di kelas IX selain dirinya adalah laki-laki. Sedangkan menurut catatan Budi, $\frac{1}{7}$ dari total siswa di kelas IX selain dirinya adalah laki-laki. Banyak siswa laki-laki di kelas IX di sekolah mereka adalah ...

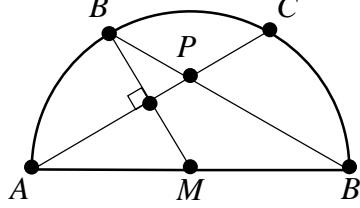
7. Diketahui luas persegi *ABCD* adalah 25 m^2. Jika *E*, *F*, dan *G* masing-masing adalah titik tengan *AB*, *AD*, dan *CD* seperti pada gambar berikut, maka luas trapesium *BHFE* adalah ... m^2.

8. Tiga bilangan *a*, *b*, dan c dipilih sehingga ketika setiap bilangan ditambahkan ke rata-rata dua bilangan lainnya maka berturut-turut hasilnya adalah 80, 90, dan 100. Rata-rata dari *a*, *b*, dan *c* adalah ...

9. Sebuah bilangan bulat *x* diambil secara acak dari $\{x \mid -5 \le x \le 10, x \text{ bilangan bulat}\}$. Peluang bahwa *x* adalah penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{x^2 - 3x} \le 2$ adalah ...

10. Misalkan *n* adalah suatu bilangan asli dan *x* adalah bilangan riil positif.

    $2x^n + \dfrac{3}{x^{-\frac{n}{2}}} = 0$, maka nilai $\dfrac{2}{x^n + \frac{1}{4}}$ sama dengan ...

BAGIAN B: SOAL URAIAN

1. Saat ini umur Agus dan umur Fauzan kurang dari 100 tahun. Jika umur Agus dan umur Fauzan ditulis secara berurutan, maka diperoleh suatu bilangan empat digit (angka) yang merupakan kuadrat sempurna. Dua puluh tiga tahun kemudian, jika umur mereka ditulis dengan cara yang sama, maka diperoleh bilangan empat digit lain yang juga merupakan kuadrat sempurna. Jika umur mereka diasumsikan merupakan bilangan bulat positif, berapakah umur mereka saat ini?

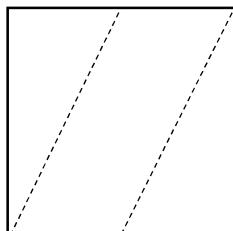
2. Pada sebuah segiempat *ABCD*, sudut *ABC* dan sudut *DAC* adalah sudut siku-siku. Jika keliling segiempat *ABCD* adalah 64 cm, keliling *ABC* adalah 24 cm, dan keliling *ACD* adalah 60 cm, berapakah luas segiempat *ABCD*?

3. Diketahui bilangan bulat positif n memiliki sifat-sifat berikut. 2 membagi n, 3 membagi $n + 1$, 4 membagi $n + 2$, 5 membagi $n + 3$, 6 membagi $n + 4$, 7 membagi $n + 5$, dan 8 membagi $n + 6$. Bilangan bulat positif pertama yang memiliki sifat-sifat ini adalah 2. Tentuka bilangan bulat positif ke- 5 yang memenuhi sifat-sifat di atas!

4. Tiga garis lurus l_1, l_2, dan l_3 mempunyai fradien berturut-turut 3, 4, dan 5. Ketiga garis tersebut memotong sumbu-y di titik yang sama. Jika jumlah absis titik potong masing-masing garis dengan sumbu-x adalah $\frac{47}{60}$, tentukan persamaan garis l_1.

5. Data akhir suatu kompetisi yang diikuti oleh tiga tim sepakbola, masing-masing tim saling berhadapan, dituliskan pada berikut.

Tim	Menang	Kalah	Seri	Gol (Memasukkan-Kemasukan)	
Elang	1	0	1	5	2
Garuda	1	0	1	4	3
Merpati	0	2	0	3	7

Berapakah skor pertandingan antara tim Garuda melawan tim Merpati?

SELEKSI TINGKAT PROVINSI 2012

BAGIAN A: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Sebuah silinder memiliki tinggi 5 cm dan volume 20 cm^3. Luas permukaan bola terbesar yang mungkin diletakkan ke dalam silinder tersebut adalah ...

2. Jumlah tiga bilangan adalah 19. Jika bilangan pertama dan bilangan kedua masing-masing dikurangi 1, maka diperoleh dua bilangan dengan rasio 1 : 3. Jika bilangan kedua dan ketiga masing-masing ditambah 3, maka diperoleh dua bilangan dengan rasio 5 : 6. Selisih bilangan terbesar dan terkecil adalah ...

3. Jika $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+...=a$, maka $\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+...=...$

4. Lima belas bilangan prima pertama dituliskan berturut-turut pada lima belas kartu. Jika semua kartu tersebut diletakkan dalam sebuah kotak dan kemudian diambil secara acak dua buah kartu berturut-turut tanpa pengembalian, maka peluang terambil dua kartu dengan jumlah dua bilangan tertulis merupakan bilangan prima adalah ...

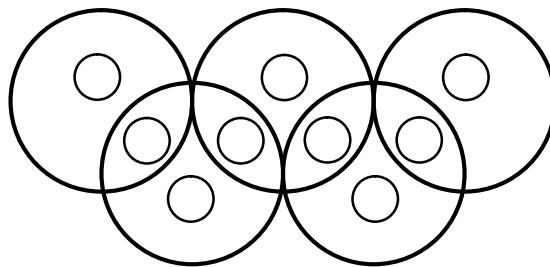
5. Perhatikan gambar bangun datar setengah lingkaran dengan diameter *AD* dan pusat lingkaran *M* di samping. Misalkan *B* dan *C* adalah titik-titik pada lingkaran sedemikian sehingga *AC*, *BM* dan *BD* memotong *AC* di titik *P*. Jika besar $\angle CAD = s°$, maka besar $\angle CPD = ...°$

6. Lima angka yakni 1, 2, 3, 4, dan 5 dapat disusun semuanya tanpa pengulangan menjadi 120 bilangan berbeda. Jika bilangan –bilangan tersebut diurutkan dari yang terkecil ke yang terbesar, maka bilangan yang menempati urutan ke-75 adalah ...

7. Diketahui $1 + k$ habis dibagi 3, $1 + 2k$ habis dibagi 5, $1 + 8k$ habis dibagi 7. Jika k adalah bilangan bulat positif, maka nilai terkecil untuk k adalah ...

8. Jika $p = 2010^2 + 2011^2$ dan $q = 2012^2 + 2013^2$, maka nilai sederhana dari $\sqrt{1-2(p+q)+4pq}$ adalah ...

9. Jika a dan b adalah penyelesaian dari persamaan kuadrat $4x^2 - 7x - 1 = 0$ maka nilai dari $\frac{3a^2}{4b-7} + \frac{3b^2}{4a-7}$ adalah ...

10. Pada gambar berikut, kedua ruas garis putus-putus yang sejajar membagi persegi menjadi tiga daerah yang luasnya sama. Jika jarak kedua ruas garis putus-putus tersebut 1 cm, maka luas persegi adalah ... cm^2

BAGIAN B: SOAL URAIAN

1. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi persamaan berikut:

   $2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1$

2. Pada gambar berikut, Sembilan lingkaran kecil dalam lambang olimpiade akan diisi masing- masing dengan bilangan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, atau 9. Tentukan pengisian tersebut sehingga jumlah bilangan di dalam setiap lingkaran besar adalah 14.

3. Diketahui ΔABC dengan AB = 25 cm, BC = 20 cm, dan AC = 15 cm. Jika titik D terletak pada sisi AB sedemikian sehingga perbandingan luas ΔADC dan ΔABC adalah 14 : 25, tentukan panjang CD.

4. Dari hasil sensus diketahui bahwa penduduk suatu kota tak lebih dari 10.000 orang dan anak-anak 20% lebih banyak dari penduduk dewasa. Jika anak laki-laki 10% lebih banyak dari anak perempuan, serta di antara penduduk dewasa terdapat 15% lebih banyak perempuan, tentukan jumlah terbesar yang mungkin dari penduduk kota tersebut.

5. Diketahui sebuah bilangan rasional positip kurang dari 1 yang dinyatakan dalam pecahan biasa dalam bentuk paling sederhana. Jika hasil kali pembilang dan penyebut dari bilangan rasional tersebut adalah $20! = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times 20$, tentukan semua bilangan yang dimaksud.

SELEKSI TINGKAT PROVINSI 2013

BAGIAN A: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Diketahui segitiga sama sisi dengan panjang sisi 10 cm. Jika dibuat lingkaran yang berpusat di titik tengah salah satu sisi segitiga dengan jari-jari 5 cm, maka luas daerah di dalam lingkaran dan di luar segitiga adalah ... cm^2.

2. Rata-rata dari 25 siswa adalah 40. Jika selisih rata-rata nilai 5 siswa terendah dan 20 siswa sisanya adalah 25, maka rata-rata nilai 5 siswa terendah adalah...

3. Dalam sebuah kotak terdapat beberapa bola dengan empat macam warna yakni: biru, merah, kuning, dan putih. Paling sedikit terdapat 10 bola untuk masing-masing warna. Bola diambil satu demi satu dari dalam kotak tersebut secara acak tanpa pengembalian. Banya pengambilan yang harus dilakukan untuk memastikan mendapatkan 6 bola dengan warna sama adalah ...

4. Jika $\dfrac{x^3+3x^2y}{x+3y}-\dfrac{27y^3+9xy^2}{3y+x}=x+3y$, maka nilai x = ...

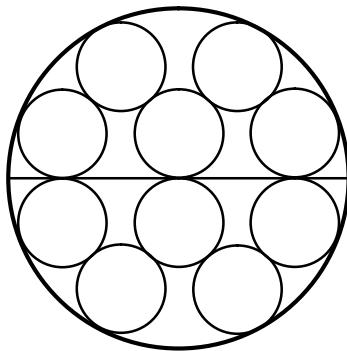
5. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\dfrac{x^4-2x^3-2x^2-1}{x^2-1}\geq 1$ adalah ...

6. Jika nilai $100B = 100^2 + 99^2 - 98^2 - 97^2 + 96^2 + 95^2 - 94^2 - 93^2 + \ldots + 4^2 + 3^2 - 2^2 - 1^2$, maka nilai B adalah ...

7. Sebuah drum berbentuk tabung yang berjari-jari 70 cm dan berisi air setinggi 40 cm (gunakan $\pi = \frac{22}{7}$). Seorang tukang pasang ubin memasukkan 110 buah ubin keramik ke dalam drum sehingga tinggi permukaan air bertambah 8 cm. Jika permukaan setiap ubin keramik berukuran 40 cm x 40 cm, berapakah tebal ubin keramik tersebut?

8. Diketahui n bilangan bulat positif. Jika n ditambahkan angka-angka pembentuknya menghasilkan 313, maka semua nilai n yang mungkin adalah...

9. Diketahui dua buah himpunan A dan B dengan

   $A=\{(x,y)\mid 1987\leq y\leq x\leq 2013 \text{ dengan } x \text{ dan } y \text{ bilangan bulat}\}$ dan

   $A=\{(x,y)\mid y\leq 2013-x \text{ dengan } x \text{ dan } y \text{ bilangan bulat}\}$.

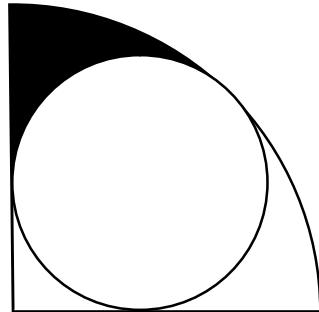
   Banyaknya anggota himpunan $A-B$ adalah ...

10. Tim sepakbola terdiri atas 25 orang, masing-masing diberi kaos bernomor 1 sampai dengan 25. Banyak cara memilih tiga pemain secara acak dengan syarat jumlah nomor kaos mereka habis dibagi tiga adalah ...

BAGIAN B: SOAL URAIAN

1. Suatu yayasan menyumbangkan 144 buku ke 4 sekolah. Banyak buku yang diterima untuk setiap sekolah tidak sama. Selisih buku yang diterima sekolah A dan B adalah 16. Selisih buku yang diterima sekolah B dan C adalah 12. Selisih buku yang diterima sekolah C dan D adalah 8. Sekolah A menerima buku paling sedikit dibandingkan dengan yang diterima sekolah lain. Jika sekolah D menerima buku 2 kali lebih banyak daripada buku yang diterima sekolah A, tentuka banyak buku yang diterima masing-masing sekolah.

2. Satu set kartu remi/bridge terdiri dari 52 lembar. Diambil 5 lembar kartu secara acak. Tentukan peluang terambil 2 kartu warna merah dan 3 kartu warna hitam, yang diantaranya terdapat tepat 1 kartu king.

3. Misalkan 10 lingkaran yang berjari-jari 1 cm dimasukkan dalam lingkaran berjari-jari R cm seperti pada gambar berikut. Tentukan R.

4. Gunakan depapan bilangan prima yang berbeda dan kurang dari 25 untuk melengkapi persegi ajaib di bawah, sehingga setiap kotak di dalam persegi terisi oleh satu bilangan prima serta jumlah bilangan pada setiap baris dan setiap kolom selalu sama.

			47	53
		37	41	
29	61			
59				31

5. Didefinisikan $[\![x]\!]$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Sebagai contoh $\left[\!\left[\frac{5}{2}\right]\!\right]=2$ karena $2\le\frac{5}{2}<3$. Jika x dan y adalah bilangan real dengan $[\![\sqrt{x}]\!]=10$ dan $[\![\frac{1}{4}\sqrt{y}]\!]=8$, tentukan nilai dari $\left[\!\left[\sqrt{[\![\sqrt{x+y}]\!]}\right]\!\right]$.

SELEKSI TINGKAT PROVINSI 2014

BAGIAN A: SOAL ISIAN SINGKAT

1. Diketahui x dan y adalah bilangan bulat positif. Salah satu solusi dari $20x + 14y = 2014$ adalah $(x, y) = (100, 1)$. Salah satu solusi yang lain adalah ...

2. Jika x dan y merupakan bilangan real yang memenuhi $x^2 + y^2 = 1$, maka nilai terbesar dari perkalian x dan y adalah ...

3. Sebuah lingkaran berada dalam seperempat lingkaran besar, seperti pada gambar di samping. Jika jari-jari lingkaran besar = 8 satuan, maka luas daerah yang diarsir adalah ...

4. Jumlah 1007 bilangan bulat positif berbeda adalah 1023076. Dimana Tidak ada satupun dari bilangan-bilangan tersebut yang lebih besar dari 2014. Minimal banyaknya bilangan ganjil pada deret bilangan tersebut adalah ...

5. Terdapat bilangan ribuan dengan jumlah angka-angkanya 8. Contoh bilangan ini adalah 1232. Bilangan yang memenuhi sifat ini ada sebanyak ...

6. Misalkan $ABCD$ adalah suatu daerah trapezium sedemikian sehingga perpanjangan sisi AD dan perpanjangan sisi BC berpotongan di titik E. Diketahui panjang $AB = 18$, $CD = 30$ dan tinggi trapezium tersebut adalah 8. Jika F dan G masing-masing adalah titik tengah AD dan BC, maka luas segitiga EFG adalah ...

7. Diketahui dua persamaan: $\frac{2}{x+y} + \frac{6}{x-y} = 2$ dan $\frac{4}{x+y} - \frac{9}{x-y} = -1$

   Nilai $\frac{x}{y}$ yang memenuhi dua persamaan tersebut adalah ...

8. Jika a dan b bilangan bulat ganjil serta $a > b$ maka banyak bilangan bulat diantara $2a$ dan b adalah ...

9. Fungsi g dari himpunan X dikatakan satu-satu jika untuk setiap dengan $x_1, x_2 \in X$ dengan $g(x_1) = g(x_1)$ berlaku $x_1 = x_2$. Jika $X = \{9, 6, 3, 2, 1\}$ dan

Y = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, maka fungsi berbeda dari X ke Y yang merupakan satu-satu dan setiap bilangan anggota X tidak dikaitkan dengan faktornya di Y ada sebanyak ...

10. Indah dan Nian bermain lempar dadu secara bergantian dimulai dengan lemparan pertama giliran Indah. Seseorang akan memenangkan permainan jika ia mendapatkan mata dadu 1 tetapi lawannya tidak mendapatkan mata dadu 2 atau 3 pada lemparan sebelumya. Peluang Indah pada giliran yang ketiga melempar (lemparan kelima) akan menang adalah ...

BAGIAN B: SOAL URAIAN

1. Temukan semua bilangan real x yang memenuhi persamaan $\sqrt{2-x} > 2$
2. Diketahui jumlah n buah bilangan bulat positif ganjil berurutan adalah 5929. Tentukan n terkecil yang mungkin.
3. Diberikan kerangka limas $ABCD$ dengan alasnya adalah daerah segitiga siku-siku ABC. Diketahui sisi siku-sikunya adalah AB dan AC dengan panjang $AB = a\sqrt{3}$ dan panjang $AC = 4a$, rusuk BD tegak lurus dengan bidang ABC, dan panjang $BD = 6a$. Jika pada rusuk CD terdapat titik P sehingga sebuah bola dengan DP sebagai diameternya menyinggung bidang alas ABC, hitung jari-jari bola tersebut.
4. Sebuah kode rahasia terdiri dari dua huruf dan satu bilangan antara 100 dan 600. Aturan yang harus dipenuhi adalah sebagai berikut.

   (i) Semua angka dan huruf harus saling berbeda,

   (ii) Jika tiga angka membentuk bilangan genap maka kedua huruf yang dipilih adalah huruf vocal,

   (iii) Jika tiga angka membentuk bilangan ganjil maka kedua huruf yang dipilih adalah huruf konsonan.

   Tentukan banyak kode rahasia yang mungkin dibuat.
5. Untuk x bilangan real, dirumuskan suatu fungsi: $f(x) = \dfrac{2}{2+4^x}$

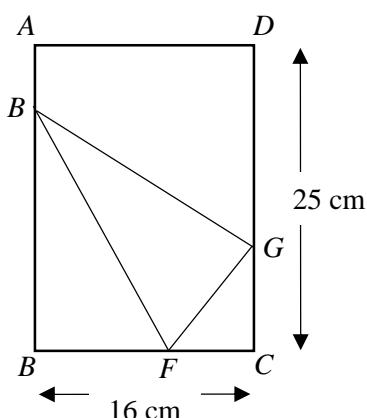
   Maka hitunglah hasil penjumlahan berikut:

   $$f\left(\frac{1}{2014}\right) + f\left(\frac{2}{2014}\right) + \dots + f\left(\frac{2013}{2014}\right)$$

BAB 7

SELEKSI TINGKAT NASIONAL

SUBBAB

- Seleksi tahun 2003
- Seleksi tahun 2004
- Seleksi tahun 2005
- Seleksi tahun 2006
- Seleksi tahun 2007
- Seleksi tahun 2008
- Seleksi tahun 2009
- Seleksi tahun 2010
- Seleksi tahun 2011
- Seleksi tahun 2012
- Seleksi tahun 2013
- Seleksi tahun 2014
- *CMO* 2012
- *CMO* 2013
- *CMO* 2014

SELEKSI TINGKAT NASIONAL 2003

A. SOAL HARI PERTAMA

1. Pola ABBCCCDDDDABBCCCDDDDABBCCCDDDD.............. berulang sampai tak terhingga. Huruf apakah yang menempati urutan ke 2533?

2. Buktikan bahwa jika $a > 2$ dan $b > 3$ maka $ab + 6 > 3d + 2b$.

3. Diberikan persegipanjang *ABCD* dengan ukuran 16 cm × 25 cm, *EBFG* layang-layang, dan panjang $AE = 5$ cm. Tentukan panjang *EF*!

4. Perhatikan kumpulan pernyataan berurut berikut.

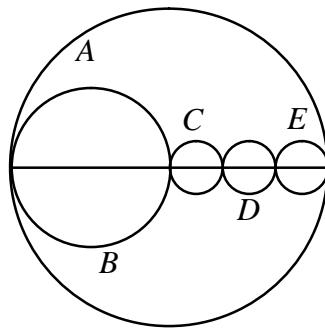
   Diketahui bahwa $x = 1$.

   Karena $x = 1$ maka $x^2 = 1$.

   Sehingga $x^2 = x$.

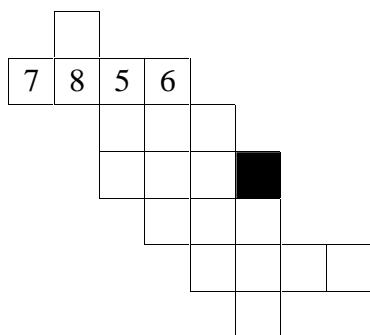
   Akibatnya, $x^2 - 1 = x - 1$

   $(x - 1)(x + 1) = (x - 1) . 1$

   Dengan aturan pencoretan, diperoleh $x + 1 = 1$

   $1 + 1 = 1$

   $2 = 1$

   Pertanyaannya.

   a. Kalau 2 = 1, maka setiap bilangan asli pasti sama dengan 1. Tunjukkan!

b. Hasil 2 = 1 adalah sesuatu yang tidak mungkin. Tentu ada yang salah di dalam argumen di atas? Dimanakah letak kesalahannya? Mengapa itu kamu anggap salah?

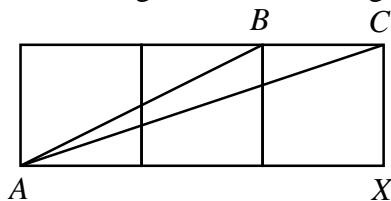
5. Untuk menghitung $\sqrt{(1998)(1996)(1994)(1992)+16}$.

   seseorang melakukannya dengan cara sederhana sebagai berikut: $2000^2 - 2 \times 5 \times 2000 + 5^2 - 5$? Apakah cara yang dilakukan orang itu dapat dibenarkan? Mengapa?

6. Untuk menarik minat pelanggan, suatu restoran penjual makanan cepat saji memberi kan kupon berhadiah kepada setiap orang yang membeli makanan di restoran tersebut dengan nilai lebih dari Rp 25.000,-. Di balik setiap kupon tersebut, tertera salah satu dari bilangan-bilangan berikut: 9, 12, 42, 57, 69, 21, 15, 75, 24 dan 81. Pembeli yang berhasil mengumpulkan kupon dengan jumlah bilangan di balik kupon tersebut sama dengan 100 akan diberi hadiah berupa TV 21". Kalau pemilik restoran tersebut menyediakan sebanyak 10 buah TV 21", berapa banyak yang harus diserahkan kepada para pelanggannya?

7. Diketahui bentuk gambar di bawah berikut ini.

   Titik-titik pusat lingkaran *B*, *C*, *D*, dan *E* diletakkan pada garis tengah lingkaran *A* dan garis tengah lingkaran *B* sama dengan jari-jari lingkaran *A*. Lingkaran *C*, *D*, dan *E* sama besar dan sepasang-sepasang bersinggungan di luar sehingga jumlah panjang garis tengah ketiga lingkaran tersebut sama dengan jari-jari lingkaran *A*. Bagaimanakah perbandingan keliling lingkaran *A* dengan jumlah keliling lingkaran *B*, *C*, *D*, dan *E*?

8. Diketahui $a + b + c = 0$. Tunjukkan bahwa $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$!

B. SOAL HARI KEDUA

1. Diketahui bahwa $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Untuk $k > 2$ didefinisikan bahwa $a_k = \frac{1}{2}a_{k-2} + \frac{1}{3}a_{k-1}$ Tentukanlah jumlah tak hingga dari $a_1 + a_2 + a_3 + ...$

2. Bilangan terkali adalah bilangan asli dalam bentuk dua digit diikuti oleh hasil kalinya. Sebagai contoh, 7 × 8 = 56, maka 7856 dan 8756 adalah bilangan terkali. 2 × 3 = 6, maka 236 dan 326 adalah bilangan terkali. 2 × 0 = 0, maka 200 adalah bilangan terkali. Sebagai catatan, digit pertama bilangan terkali tidak boleh 0.

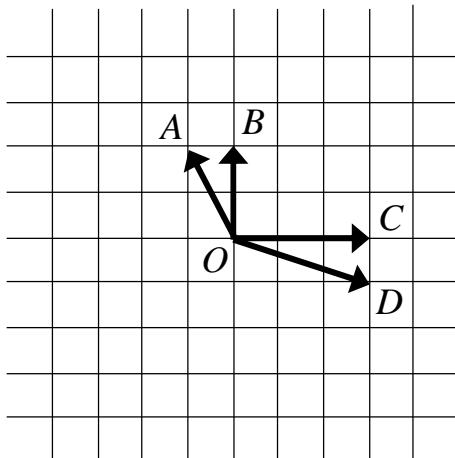
   a. Berapakah selisih antara bilangan terkali terbesar dan bilangan terkali terkecil?

   b. Cari semua bilangan terkali terdiri dari tiga digit yang masing-masing digitnya merupakan bilangan kuadrat.

   c. Diberikan "kotak-kotak" berikut yang harus diisi dengan bilangan terkali.

   Tentukan isi dari kotak yang diarsir. Apakah isi ini merupakan satu-satunya?

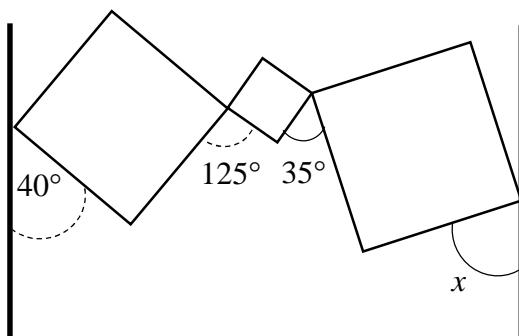
   d. Lengkapi semua semua kotak kosong di atas dengan bilangan terkali

3. Perhatikan gambar susunan tiga persegi di bawah.

   Buktikan bahwa $\angle BAX + \angle CAX = 45°$

4. Buktikan bahwa $(n - 1)n\ (n^3 + 1)$ senantiasa habis dibagi oleh 6 untuk semua bilangan asli n.

SELEKSI TINGKAT NASIONAL 2004

A. SOAL HARI PERTAMA

1. Diketahui titik $A(-1,2)$, $B(0,2)$, $C(3,0)$, dan $D(3,-1)$ seperti terlihat pada gambar berikut. Tentukan besar sudut AOD!

2. Tentukan semua bilangan prima $p > 2$ sehingga p membagi $71^2 - 37^2 - 51$.

3. Suatu bola jika dijatuhkan tegak lurus ke tanah dari suatu ketinggian maka ia akan memantul kembali tegak lurus sepanjang sepertiga tinggi semula, turun kembali tegak lurus dan memantul kembali sepertiga tingginya, dan seterusnya. Jika jarak yang ditempuh bola tersebut pada saat menyentuh tanah yang keempat sama dengan 106 meter. Dari ketinggian berapakah bola tersebut dijatuhkan?

4. Balok $ABCD.EFGH$ diperoleh dengan menempelkan dua kubus satuan $ABCD.PQRS$ dan $PQRS.EFGH$. Titik K adalah titik tengah rusuk AB, sedangkan titik L adalah titik tengah rusuk SH. Berapakah panjang ruas garis KL?

5. Ada berapa banyakkah bilangan asli yang tidak lebih besar dari 2004 yang bersisa 1 ketika dibagi 2, bersisa 2 ketika dibagi 3, bersisa 3 ketika dibagi 4, dan bersisa 4 ketika dibagi 5?

B. SOAL HARI KEDUA

1. Sebuah dadu biasa 6-muka dilempar tiga kali. Berapakah besarnya kemungkinan jumlah mata dadu pada ketiga lemparan adalah 12?

2. Diberikan dua bilangan real positif x dan y sehingga $xy = 1$. Tentukan nilai minimum:

   $$\frac{1}{x^4} + \frac{1}{4y^4}$$

3. Diketahui rangkaian persegi yang disusun secara berkesinambungan dan membentuk sudut-sudut sebagaimana pada gambar berikut.Tentukan nilai sudut yang ditandai dengan huruf x.

4. Tentukan bilangan asli n terkecil sehingga jumlah ukuran sudut-sudut segi-n, dengan $n > 6$ kurang dari n^2 derajat!

5. Ada suatu kartu ajaib. Dengan menyebutkan di kartu yang mana suatu bilan gan berada, tanpa melihat kartu sama sekali, seseorang dengan tepat bisa menebak bilangan yang dimaksud. Kalau bilangan tersebut ada pada Kartu A dan B, maka bilangan yang dimaksud adalah 1 + 2 (jumlah bilangan pojok kiri atas) kartu A dan B. Kalau bilangan tersebut ada di A, B, dan C, bilangan yang dimaksud adalah 1 + 2 + 4 atau sama dengan 7 (yang diperoleh dengan menambahkan bilangan-bilangan di pojok kiri atas masing-masing kartu A, B, dan C).

A

1	3
5	7

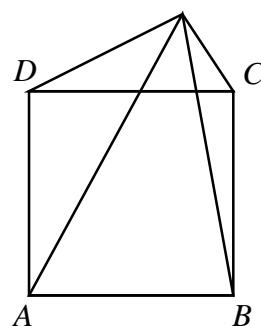
B

2	3
6	7

C

4	5
6	7

   a. Bagaimana hal ini bisa dijelaskan?

   b. Andai kita akan membuat kartu-kartu yang memuat bilangan dari 1 sampai dengan 15 berdasarkan aturan di atas. Coba buatkan kartu-kartunya.

SELEKSI TINGKAT NASIONAL 2005

A. SOAL HARI PERTAMA

1. A adalah suatu himpunan bilangan. Himpunan A memiliki sifat tertutup terhadap pengurangan, artinya hasil pengurangan dua bilangan di A akan menghasilkan bilangan di A juga. Jika diketahui dua anggota dari A adlah 4 dan 9, tunjukkan bahwa:

   a. $0 \in A$

   b. $13 \in A$

   c. $74 \in A$

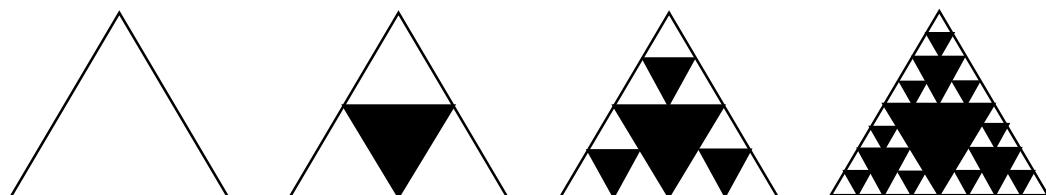
   d. Selanjutnya daftarlah semua anggota himpunan A

2. (2, 0, 4, 1) adalah salah satu selesaian/jawab dari $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$. Jika semesta pembicaraan pada persamaan ini adalah himpunan semua bilangan bulat tidak negatif, tentukan banyak selesaian/jawab yang mungkin dari $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$.

3. Adi adalah karyawan pada salah satu perusahaan tekstil yang bertugas menyimpan data. Suatu ketika Adi diminta pimpinan perusahaan untuk menyiapkan data tentang kenaikan produksi selama lima periode. Setelah dicari Adi hanya menemukan empat data kenaikan, yaitu 4%, 9%, 7%, dan 5%. Satu data lagi, yaitu data ke-5, tidak ditemukan. Selidiki data kenaikan produksi yang ke-5, bila Adi hanya ingat bahwa rata-rata hitung dan median dari lima data tersebut adalah sama.

4. Tentukan semua pasangan bilangan bulat (x,y) yang memenuhi sistem persamaan berikut.

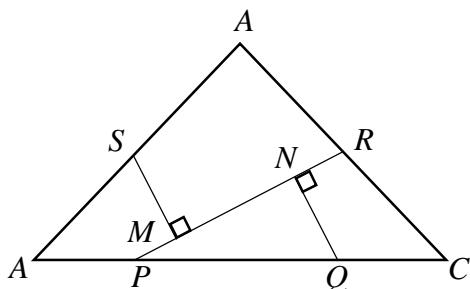
$$\begin{cases} x(y+1) = y^2 - 1 \\ y(x+1) = x^2 - 1 \end{cases}$$

5. Diketahui gambar berikut. $ABCD$ adalah persegi, dan E adalah titik sebarang di luar persegi $ABCD$. Selidiki apakah berlaku hubungan $AE^2 + CE^2 + BF^2 + DE^2$ pada gambar di samping!

B. SOAL HARI KEDUA

1. Diantara bilangan $\frac{1}{5}$ dan $\frac{1}{4}$ terdapat tak hingga banyak bilangan pecah. Tentukan 999 bilangan pecah di antara $\frac{1}{5}$ dan $\frac{1}{4}$ sehingga selisih antara bilangan pecah berikutnya dengan bilangan pecah sebelumnya konstan. (Maksudnya: Jika $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots, x_{999}$ adalah bilangan pecah yang dimaksudkan, maka:

   $$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots.. = x_n - x_{n-1} = \ldots.. = x_{999} - x_{998}$$

2. Pola pada gambar gambar di bawah adalah: "*Gambar berikutnya diperoleh dengan menambahkan gambar segitiga samasisi berwarna hitam yang nkuran sisitiya setengah dari sisi masing-masing segitiga warna putih yang tersisa pada gambar sebelumnya*." Jika pola tersebut berkelanjutan (kontinu) sampai tak hingga.

   Jika diketahui bahwa luas segitiga pada gambar 1 adalah 1 satuan luas, tentukan luas keseluruhan daerah yang dibentuk oleh segitiga-segitiga hitam pada gambar 5. Andaikata Anda diminta untuk menemukan luas keseluruhan daerah yang dibentuk oleh segitiga-segitiga hitam pada gambar ke-20, rumus yang bagaimanakah yang bisa anda gunakan?

3. Untuk setiap pasangan bilangan asli *a* dan *b*, kita definisikan *a***b* = *ab* + *a* – *b*. Bilangan asli *x* dikatakan penyusun bilangan asli *n* jika terdapat bilangan asli *y* yang memenuhi *x***y* = *n*. Sebagai contoh, 2 adaiah penyusun 6 karena terdapat bilangan asli 4 sehingga 2*4 = 2 · 4 + 2 – 4 = 8 + 2 – 4 = 6. Tentukan semua penyusun 2005.

4. Tiga orang hendak makan di suatu rumah makan. Untuk menemukan siapakah yang membayar mereka membuat suatu permainan. Masing-masing mengetos satu koin secara bersama-sama. Jika hasilnya muka semua atau belakang semua, maka mereka mengetos lagi. Jika tidak demikian, maka "orang ganjil" (yaitu orang yang koinnya muncul berbeda dari dua orang

lainnya) yang membayar. Tentukan banyak-nya semua hasil yang mungkin jika permainan berakhir pada pengetosan:

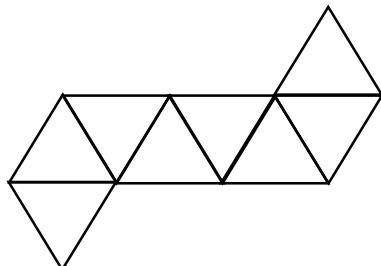
a. Pertama.

b. Kedua.

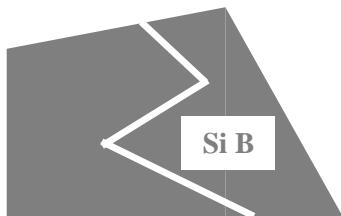
c. Ketiga.

d. Kesepuluh

5. Diketahui bentuk $x^2 + 3y^2 = n$, dengan x dan y adalah bilangan-bilangan bulat. Jika $n < 20$ bilangan berapa sajakah n tersebut, dan diperoleh dari pasangan (x,y) apa saja? Tunjukkan bahwa tidak mungkin menghasilkan $x^2 + 3y^2 = 8$.

SELEKSI TINGKAT NASIONAL 2006

A. SOAL HARI PERTAMA

1. Diketahui $N = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{9999...9}_{121 \text{ angka}}$. Tentukan nilai N.

2. Segitiga ABC pada gambar berikut ini adalah samakaki, dengan $AB = AC = 90$ cm dan $BC = 108$ cm. Titik P dan Q masing-masing terletak pada BC sedemikian sehingga $BP : PQ : QC = 1 : 2 : 1$. Titik S dan R berturut-turut terletak tepat di tengah AB dan AC. Dari kedua titik ini masing- masing ditarik garis tegaklurus terhadap PR sehingga memotong di PR di titik M dan N. Tentukan panjang MN.

3. Apabila delapan segitiga samasisi yang sisinya 12 cm disusun seperti pada gambar di samping, diperoleh suatu jaring-jaring oktahedron. Tentukan volume dari oktahedron tersebut.

4. Diketahui $a^2 + b^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 1$. Lanjutkan proses aljabar berikut.

   $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = ...$

   a. Hubungan apakah yang bisa disimpulkan antara $ax + by$ dengan 1?

   b. Mengapa?

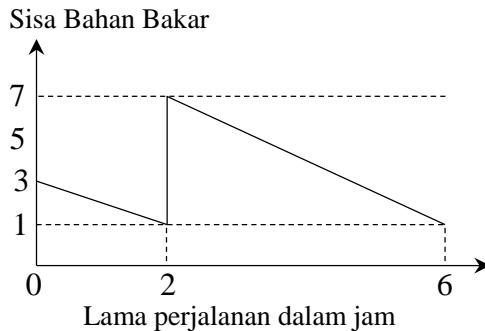
5. Satu set soal terdiri dari 3 soal dengan pilihan jawaban Benar (B) atau Salah (S), serta 3 soal pilihan ganda dengan jawaban A, B, C, atau D. Seseorang menjawab semua soal secara acak. Berapa peluang ia hanya benar 2 soal?

B. SOAL HARI KEDUA

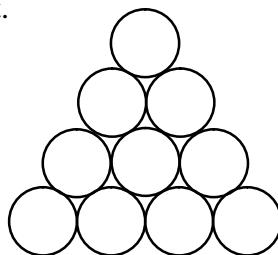
1. Dua bilangan bulat m dan n dikatakan relatif prima jika ada bilangan bulat a dan b sedemikian sehingga $am + bn = 1$. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat p, pasangan bilangan yang dibentuk oleh $21p + 4$ dan $14p + 3$ senantiasa relatif prima.

2. Dua orang petani, Si A dan Si B bermaksud mengubah batas tanah mereka sehingga menjadi seperti garis lurus, tidak berbelok-belok seperti pada gambar di bawah. Mereka tidak ingin luas daerah asalnya berkurang. Coba tentukan garis batas yang seharusnya mereka sepakati, dan jelaskan mengapa batas baru tersebut tidak rnengurangi luas daerah asalnya masing-masing.

3. Diketahui sistem persamaan empat variabel:

   $23x + 47y - 3z = 434$

   $47x - 23y - 4w = 183$

   $19z + 17w = 91$

   dengan x, y, z, dan w adalah bilangan bulat positif.

   Tentukan nilai dari $(13x - 14y)^3 - (15z + 16w)^3$

4. Seseorang mengendarai kendaraan bermotor sehingga diperoleh grafik bahan bakar yang digunakannya sebagai berikut.

Mula-mula kendaraannya berisi 3 liter bahan bakar. Setelah dua jam perjalanan bahan bakarnya tersisa 1 liter,

a. Jika dalam 1 liter dia bisa menempuh jarak sejauh 32 km, berapakah jarak yang ditempuhnya secara keseluruhan. Jelaskan mengapa Anda menjawab seperti itu?

b. Sesudah dua jam perjalanan, apakah terjadi percepatan atau perlambatan? Jelaskan jawab Anda!

c. Tentukan berapa kecepatan rata-rata kendaraan tersebut!

5. Amir akan membuat lukisan dari lingkaran-lingkaran yang setiap lingkarannya diisi dengan bilangan. Lukisan lingkaran tersebut disusun mengikuti pola berikut.

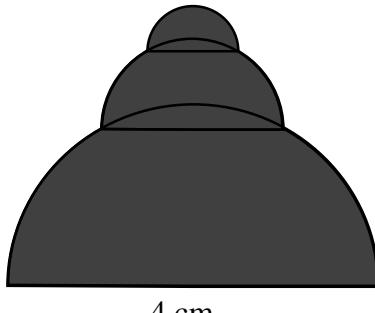
Dia membuat aturan bahwa empat lingkaran terbawah akan diisi dengan bilangan- bilangan positif kurang dari 10 yang dapat diambil dari angka-angka pada tanggal kelahirannya, yakni 26 - 12 - 1961 tanpa berulang. Sementara itu, lingkaran-lingkaran di atasnya akan diisikan dengan bilangan-bilangan yang merupakan hasil kali dua bilangan pada lingkaran-lingkaran di bawahnya.

a. Ada berapa carakah dia menempatkan bilangan-bilangan itu dari kiri ke kanan pada lingkaran-lingkaran terbawah agar diperoleh nilai terbesar pada lingkaran yang paling atas? Jelaskan!

b. Pada kesempatan yang lain, dia berencana memasukkan semua angka pada tanggal kelahirannya tersebut sehingga jumlah lingkaran terbawah sekarang harus sebanyak 8 lingkaran. Dia tidak lagi memperhatikan berulang tidaknya bilangan-bilangan itu.

   i. Agar diperoleh nilai terkecil pada lingkaran yang paling atas, bagaimanakah bilangan-bilangan itu disusun?

   ii. Ada berapa susunan yang patut dipertimbangkan untuk menghasilkan nilai terkecil?

SELEKSI TINGKAT NASIONAL 2007

A. SOAL HARI PERTAMA

1. Satu set kartu memuat 100 kartu yang masing-masing ditulisi bilangan dari 1 sampai dengan 100. Pada setiap dua sisi kartu ditulis bilangan yang sama, sisi pertama berwarna merah dan sisi yang lain berwarna hijau. Pertama-tama Leny menyusun semua kartu dengan tulisan merah menghadap ke atas. Kemudian Leny melakukan tiga langkah berikut ini:

   I. Membalik semua kartu yang nomornya habis dibagi 2

   II. Membalik lagi semua kartu yang nomornya habis dibagi 3

   III. Membalik lagi semua kartu yang nomornya habis dibagi 5, namun tidak membalik semua kartu yang nomornya habis dibagi 5 dan 2.

   Tentukan banyak kartu Leny sekarang yang bernomor berwarna merah dan menghadap ke atas!

2. Hitunglah luas daerah dari tiga daerah setengah lingkaran yang beririsan seperti tampak pada gambar berikut.

4 cm

3. Diketahui bahwa $x + \frac{1}{x} = 7$. Tentukan nilai A agar $\frac{Ax^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{5}{6}$.

4. Ada 13 kado berbeda yang akan dibagikan semuanya kepada Ami, Ima, Mai, dan Mia. Jika Ami mendapat paling sedikit 4 kado, Ima dan Mai masing-masing mendapat paling sedikit 3 kado, dan Mia mendapat paling sedikit 2 kado, ada berapa banyak susunan kado yang mungkin diperoleh?

5. Suatu bilangan asli disebut *bilangan kuaprim* jika memenuhi keempat syarat berikut.

   i. Tidak memuat angka nol.

ii. Angka-angka penyusun bilangan itu berbeda.

iii. Satu angka pertama dan satu angka terakhir merupakan bilangan prima atau bilangan kuadrat.

iv. Setiap pasang angka berurutan membentuk bilangan prima atau bilangan kuadrat.

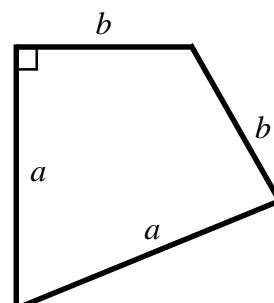
Sebagai contoh, kita periksa bilangan 971643.

(i) 971643 tidak memuat angka nol.

(ii) Angka-angka penyusun 971643 berbeda.

(iii) Satu angka pertama dan satu angka terakhir dari 971643, yaitu 9 dan 3 merupakan bilangan prima atau bilangan kuadrat.

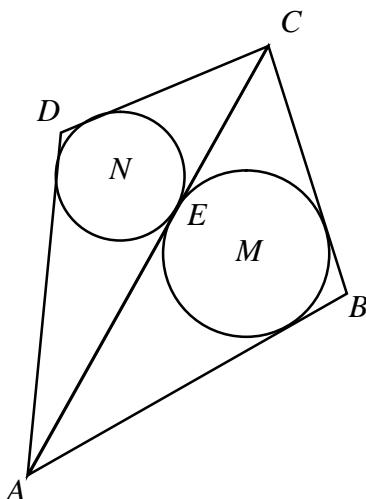
(iv) Setiap pasang angka berurutan, yaitu 97, 71, 16, 64, dan 43 membentuk bilangan prima atau bilangan kuadrat.

Jadi 971643 merupakan bilangan kuaprim.

Carilah bilangan kuaprim 6-angka paling besar.

Carilah bilangan kuaprim 6-angka paling kecil.

Angka berapa yang tidak pernah termuat dalam sebarang bilangan kuaprim? Jelaskan.

B. SOAL HARI KEDUA

1. Empat bangun berbentuk layang-layang seperti gambar berikut ($a > b$, a dan b bilangan asli kurang dari 10) ditata sedemikian rupa sehingga membentuk persegi dengan lubang berbentuk persegi pula di tengah-tengahnya. Lubang berbentuk persegi di tengah-tengah tersebut memiliki keliling 16 satuan panjang. Berapakah keliling yang mungkin diperoleh dari persegi terluar yang terbentuk jika diketahui pula bahwa a dan b adalah bilangan-bilangan yang relatif prima.

2. Jika $a = 3^p$, $b = 3^q$, $c = 3^r$, dan $d = 3^s$ dan jika p, q, r, dan s adalah bilangan asli, berapakah nilai terkecil dari $p \cdot q \cdot r \cdot s$ yang memenuhi $a^2 + b^3 + c^5 = d^7$

3. Ucok bermaksud menyusun suatu kode kunci (*password*) yang terdiri atas 8 angka dan memenuhi ketentuan berikut:

   i. Angka yang dipakai adalah 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9.

   ii. Angka pertama yang dipakai adalah minimal 1, angka kedua minimal 2, angka ketiga-minimal 3, dan seterusnya.

   iii. Angka yang sama bisa digunakan beberapa kali.

   a) Berapa banyak *password* berbeda yang mungkin disusun Ucok?

   b) Berapa banyak *password* berbeda yang mungkin disusun Ucok, jika *ketentuan (iii)* diganti dengan: tidak boleh ada angka yang digunakan lebih dari satu kali.

4. Untuk sebarang bilangan bulat a, b, dan c berlaku:

   $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

   a) Cari contoh yang menunjukkan bahwa:

   $a + (b \times c) \neq (a + b) \times (a + c)$.

   b) Kapan berlaku:

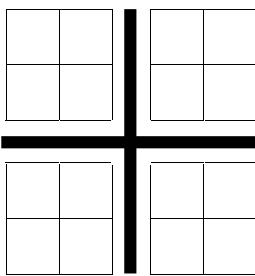
   $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$?

   Jelaskan jawaban Anda.

5. Hasil *survey* terhadap N orang dengan pertanyaan apakah mereka memelihara anjing, burung, atau kucing dirumah adalah sebagai berikut: 50 orang memelihara burung, 61 orang tidak memelihara anjing, 13 orang tidak memelihara kucing, dan paling sedikit ada 74 orang yang memelihara paling sedikit dua jenis binatang di rumah. Berapakah nilai maksimum dan minimum dari nilai N yang mungkin?

SELEKSI TINGKAT NASIONAL 2008

A. SOAL HARI PERTAMA

1. Lingkaran *M* adalah lingkaran dalam dari ΔABC, sedangkan lingkaran *N* merupakan lingkaran dalam dari ΔACD. Lingkaran *M* dan *N* bersinggungan di titik *E*. Jika panjang sisi $AD = x$ cm, $AB = y$ cm, $BC = z$ cm, tentukan panjang sisi *DC* (nyatakan dalam *x*, *y*, dan *z*).

2. Alamat rumah di Jalan Bahagia hendak diberi nomor dengan aturan sebagai berikut. Satu sisi jalan dinomori dengan nomor bilangan genap berurutan mulai dari nomor 2. Sisi seberangnya dinomori dengan nomor ganjil mulai dari nomor 3. Pada deretan rumah bernomor genap, terdapat beberapa tanah kosong yang belum dibangun rumah. Rumah pertama yang bernomor 2 memiliki tetangga di sebelahnya. Pada waktu pengurus RT memesan nomor-nomor rumah tersebut, diketahui biaya pembuatan setiap digitnya adalah Rp.12.000,- . Untuk itu, total biaya yang harus dikeluarkan adalah Rp.1.020.000,-. Diketahui pula bahwa biaya seluruh nomor rumah sisi genap Rp.132.000,- lebih murah dibanding sisi ganjil. Apabila tanah kosong nanti sudah dibangun rumah, banyaknya rumah di sisi genap dan ganjil adalah sama. Tentukan banyaknya rumah yang sekarang telah ada di Jalan Bahagia tersebut.

3. Diberikan suatu soal berikut: *Setiap unsur dalam himpunan* $A = \{10, 11, 12, ..., 2008\}$ *dikalikan dengan setiap unsur dalam himpunan* $B = \{21, 22, 23, ..., 99\}$. *Hasil-hasil kali itu selanjutnya dijumlahkan sehingga memberikan nilai X. Tentukan nilai X.* Seseorang menjawab soal tersebut dengan cara

mengalikan 2016991 dan 4740. Bagaimana kalian bisa menjelaskan bahwa cara orang itu masuk akal?

4. Misalkan P adalah himpunan semua bilangan bulat positif antara 0 dan 2008 yang dapat dinyatakan sebagai jumlah dari dua bilangan bulat positif berurutan atau lebih. (Contoh: $11 = 5 + 6$, $90 = 29 + 30 + 31$, $100 = 18 + 19 + 20 + 21 + 22$. Jadi 11, 90, 100 adalah beberapa anggota P) Tentukan jumlah dari semua anggota P!

5. Bilangan empat angka akan dibentuk dari angka-angka pada 0, 1, 2, 3, 4, 5 dengan syarat angka- angka pada bilangan tersebut tidak berulang, dan bilangan yang terbentuk merupakan kelipatan 3. Berapakah peluang bilangan yang terbentuk mempunyai nilai kurang dari 3000?

B. SOAL HARI KEDUA

1. Misalkan himpunan $A = (x, y) \mid 3x + 5y \geq 15, x + y^2 \leq 25, x \geq 0, x, y$ bilangan bulat). Tentukan semua pasangan $(x, zx) \in A$ dengan syarat z merupakan bilangan bulat tidak nol.

2. Seorang pemilik toko menginginkan bisa menimbang berbagai macam berat benda (dalam bilangan asli) hanya dengan 4 anak timbangan yang berbeda. (Sebagai contoh, jika dia memiliki anak timbangan 1, 2, 5 dan 10. Dia bisa menimbang berat 1 kg, 2 kg, 3 kg (1 + 2), 4 kg (5 – 1), 5 kg, 6 kg, 7 kg, 8 kg, 9 kg (10 – 1), 10 kg, 11 kg, 12 kg, 13 kg (10 + 1 + 2), 14 kg (10 + 5 – 1), 15 kg, 16 kg, 17 kg dan 18 kg). Kalau dia ingin bisa menimbang semua berat dari 1 kg sampai dengan 40 kg, tentukan empat anak timbangan yang harus dimilikinya. Berikan penjelasan bahwa jawaban kalian benar!

3. Diberikan tabel sebagai berikut.

Tabel 4 × 4 ini merupakan gabungan empat bagian tabel yang lebih kecil berukuran 2 × 2 Tabel ini akan diisi dengan empat bilangan bulat berurutan sedemikian sehingga:

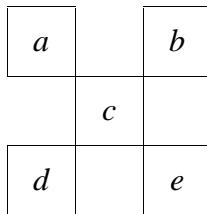
- Jumlah mendatar bilangan-bilangan pada setiap barisnya sama dengan 10
- Jumlah vertical bilangan-bilangan pada setiap kolomnya sama dengan 10
- Jumlah empat bilangan dalam setiap bagian 2 × 2 yang dibatasi oleh garis tebal tersebut juga sama dengan 10.

Tentukan berapa banyak susunan yang mungkin terbentuk.

4. Suatu barisan bilangan real mempunyai suku-suku didefinisikan sebagai berikut.

   $U_n = ar^{n-1}$, jika $n = 4m - 3$ atau $n = 4m - 2$

   $U_n = -ar^{n-1}$, jika $n = 4m - 1$ atau $n = 4m$

   dengan $a > 0$, $r > 0$, dan m bilangan bulat positif.

   Buktikan bahwa jumlah semua suku ke-1 sampai dengan suku ke-2009 adalah

   $$\frac{a\left(1+r-r^{2009}+r^{2010}\right)}{1+r^2}$$

5. Kubus *ABCD.EFGH* dipotong menjadi empat bagian oleh dua bidang. Bidang pertama sejajar dengan sisi *ABCD* dan melalui titik tengah rusuk *BF*. Bidang kedua melalui titik-titik tengah *AB*, *AD*, *GH*, dan *FG*. Tentukan rasio volume dari bagian ruang yang terkecil dan bagian yang terbesar.

SELEKSI TINGKAT NASIONAL 2009

1. Sebuah persamaan kuadrat memiliki akar-akar bilangan asli a dan b. Persamaan kuadrat lainnya memiliki akar-akar b dan c dengan $a \neq c$. Jika a, b, dan c merupakan bilangan-bilangan prima yang kurang dari 15, ada berapa macam pasangan yang mungkin memenuhi syarat tersebut (dengan syarat koefisien dari suku kuadratnya sama dengan 1)?

2. Di Indonesia, dahulu dikenal pecahan yang disebut "Pecahan Nusantara". Pecahan Nusantara adalah pecahan $\frac{a}{b}$ sedemikian sehingga a dan b adalah bilangan-bilangan asli dan $a < b$. Tentukan jumlah semua pecahan nusantara mulai dari pecahan dengan $b = 2$ sampai dengan $b = 1000$.

3. Perhatikan gambar berikut. Huruf-huruf a, b, c, d, dan e di dalam kotak akan diganti dengan angka-angka dari 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, atau 9, dengan syarat a, b, c, d, dan e harus berlainan. Jika diketahui $ae = bd$, ada berapa susunan yang mungkin terjadi?

a		b
	c	
d		e

4. Diketahui segitiga ABC dengan A sebagai puncak dan BC sebagai alas. Titik P terletak pada sisi CA. Dari titik A ditarik garis sejajar PB dan memotong perpanjangan alas di titik D. Titik E terletak pada alas sehingga $CE : ED = 2 : 3$. Jika F adalah tengah-tengah antara E dan C, dan luas segitiga ABC sama dengan 35 cm^2, berapakah luas segitiga PEF?

5. Setiap sisi suatu kubus dituliskan sebuah bilangan asli. Setiap titik sudutnya diberi nilai yang merupakan hasil kali dari tiga bilangan pada tiga sisi yang berpotongan di titik sudut tersebut. Jika jumlah semua bilangan pada titik-titik sudut tersebut sama dengan 1001, tentukan jumlah semua bilangan yang dituliskan pada sisi-sisi kubus tersebut.

6. Suatu nomor telepon dengan 7 angka disebut Nomor Cantik bilamana angka-angka yang muncul pada tiga angka pertama (ketiganya harus berbeda) berulang pada pada tiga angka berikutnya atau tiga angka terakhirnya. Contoh

beberapa Nomor Cantik: 7133719, 7131735, 7130713, 1739317, 5433354. Jika angka-angkanya diambil dari 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 atau 9, tetapi angka pertama tidak boleh 0, berapakah banyaknya Nomor Cantik yang bisa diperoleh.

7. Tentukan banyaknya bilangan asli n demikian sehingga $n^3 + 100$ terbagi habis oleh $n + 10$

8. Suatu fungsi f didefinisikan seperti pada tabel berikut.

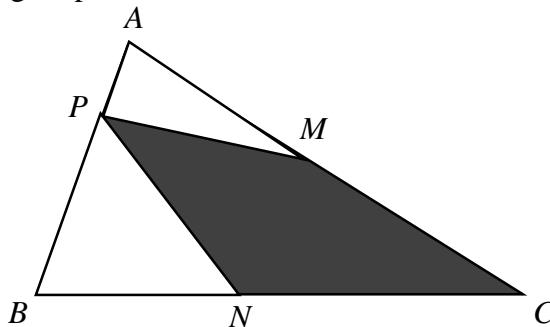
f	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	3	1	2	4

Berdasarkan definisi fungsi f di atas, selanjutnya didefinisikan suatu barisan bilangan dengan rumus umum suku-sukunya sebagai berikut. $U_1 = 2$ dan $U_{n+1} = f\left(U_n\right)$, untuk n = 1, 2, 3, ...

9. Pada suatu segitiga ABC, titik D terletak pada sisi AB dan titik E terletak pada sisi AC Tunjukkan bahwa: $\dfrac{\text{Luas } \Delta ADE}{\text{Luas } \Delta ABE} = \dfrac{AD \times AE}{AB \times AC}$

10. Pada turnamen catur, seorang pemain hanya bermain satu kali dengan pemain lainnya. Seorang pemain memperoleh nilai 1 menang, 0 jika kalah, dan $\frac{1}{2}$ jika imbang. Setelah kompetisi berakhir, diketahui bahwa $\frac{1}{2}$ total nilai yang diperoleh oleh setiap pemain didapatkan dari bermain dengan 10 pemain yang mendapatkan total poin terendah. Khusus untuk yang berada di peringkat sepuluh terbawah, $\frac{1}{2}$ total nilai yang diperolehnya didapatkan dari bermain dengan 9 pemain lainnya. Berapakah banyaknya pemain dalam kompetisi tersebut?

SELEKSI TINGKAT NASIONAL 2010

A. SOAL HARI PERTAMA

1. Sebuah pecahan disebut *Toba-n* bila pecahan itu mempunyai pembilangn 1 dan penyebut n. Jika A adalah jumlah dari semua pecahan *Toba*-101, *Toba*-102, *Toba*-103, sampai dengan *Toba*-200, tunjukkan bahwa $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$.

2. Jika a, b, dan c memenuhi sistem persamaan $\begin{cases} \dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{bc}{b+c} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{ac}{a+c} = \dfrac{1}{7} \end{cases}$

   Tentukan nilai $(a - c)^b$.

3. Diketahui segitiga ABC. Jika titik M terletak di tengah-tengah AC, titik N terletak di tengah-tengah BC, dan titik P adalah sebarang titik pada AB. Tentukan luas segiempat $PMCN$.

4. Diberikan aturan pergerakan suatu partikel pada bidang datar xy sebagai berikut.

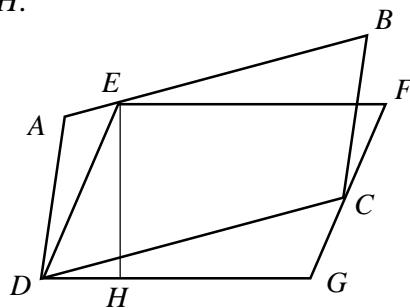
   N : $(m, n) \rightarrow (m + 1, n + 1)$

   T : $(m, n) \rightarrow (m + 1, n + 1)$

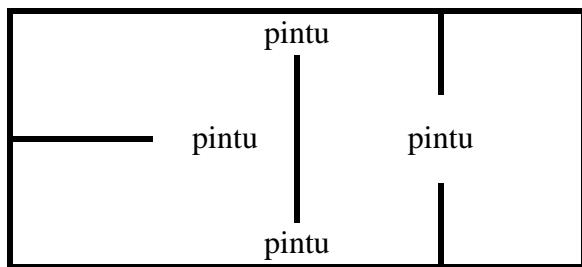
   Dengan m dan n adalah bilangan-bilangan bulat.

   Berapa banyak lintasan berbeda dari (0, 3) ke (7, 2) dengan mengunakan aturan di atas?

5. Andra dan Dedi bermain “SUPER-AS”. Aturan permainan ini sebagai berikut. Pemain bergantian mengambil kelereng dari suatu kaleng yang berisi 30 kelereng. Untuk setiap pengambilan, pemain dapat mengambil paling sedikit 1 dan paling banyak 6 kelereng. Pemain yang mengambil kelereng terakhir dinyatakan sebagai pemenang. Jika Andra memulai permainan dengan mengambil 3 kelereng terlebih dahulu, tentukan berapa kelereng yang harus diambil oleh Dedi dan bagaimana strategi pengambilang selanjutnya agar Dedi bisa menjadi pemenang.

B. SOAL HARI KEDUA

1. Jika $x + y + z = 2$, tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{xz+y-1}=\frac{-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}$$

2. Tentukan bentuk paling sederhana dari

$$\frac{3}{1!\ +\ 2!\ +\ 3!}+\frac{4}{2!\ +\ 3!\ +\ 4!}+\frac{5}{3!\ +\ 4!\ +\ 5!}+\cdots+\frac{100}{98!\ +\ 99!\ +\ 100!}$$

3. Diketahui $ABCD$ dan $DEFG$ adalah dua jajargenjang. Titik E terletak pada AB dan titik C terletak pada FG. Luas $ABCD$ adalah 20 satuan. H adalah titik pada DG sehingga EH tegak lurus DG. Jika panjnag DG adalah 5 satuan, tentukan panjang EH.

4. Setiap ruangan pada gambar berikut akan dicat sehingga setiap dua ruangan yang terhubung langsung dengan pintu diberi warna yang berbeda. Jika disediakan 10 macam warna yang berbeda dan 4 warna di antaranya tidak

boleh digunakan berdekatan untuk dua ruangan yang terhubung langsung dengan pintu, tentukan banyak cara berbeda mewarnai 4 ruangan tersebut.

5. Lantai suatu aula berbentuk persegipanjang *ABCD* dengan *AB* = 30 meter dan *BC* = 15 meter. Seekor kucing berada di posisi *A*. Melihat ada kucing, seekor tikus yang berada di tengah-tengah *AB* lari dan mencoba menghindar dari kucing. Tikus berlari dari tempatnya menuju titik *C* dengan kecepatan 3 meter/detik. Lintasannya berbentuk garis lurus. Melihat tikus melarikan diri, dalam waktu bersamaan dari titik *A* kucing pun mengejar dengan kecepatan 5 meter/detik. Jika lintasan kucing juga berbentuk garis lurus dan tikus tertangkap sebelum di *C*, tentukan persamaan yang bisa digunakan untuk menentukan posisi dan waktu tikus tertangkap kucing tersebut.

SELEKSI TINGKAT NASIONAL 2011

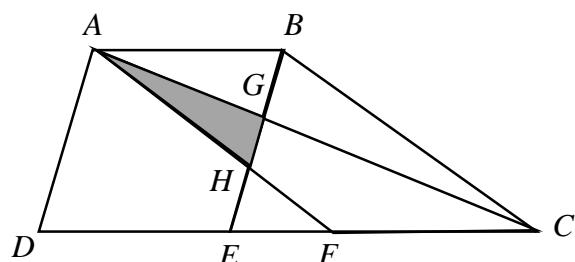
A. SOAL HARI PERTAMA

1. Dari pengukuran terhadap tinggi sembilan pohon diperoleh data sebagai berikut.

   a) Ada tiga hasil pengukuran yang berbeda (dalam satuan meter)

   b) Semua data berupa bilangan positif

   c) Mean = median = modus = 3

   d) Jumlah kuadrat semua data adalah 87

   Tentukan semua kemungkinan ukuran tinggi Sembilan pohon tersebut.

2. Didefinisikan nilai mutlak $|x|$ sebagai berikut.

3. $|x| = x$, jika $x \geq 0$ dan $|x| = -x$, jika $x < 0$

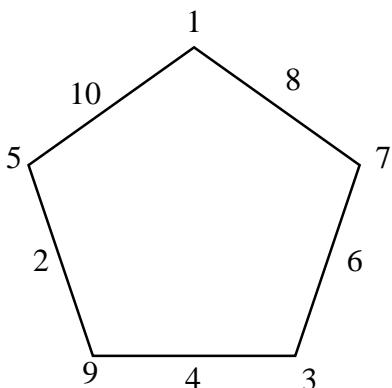
   Jika x dan y adalah bilangan bulat, tentukan banyak pasangan (x,y) yang memenuhi $|x| + |y| \leq 50$

4. Bangun datar *ABCD* di samping adalah trapesium dengan *AB* sejajar *CD*. Titik *E* dan *F* terletak pada *CD* sehingga *AD* sejajar *BE* dan *AF* sejajar *BC*. Titik *H* adalah perpotongan *AF* dengan *BE* dan titik *G* adalah perpotongan *AC* dengan *BE*. Jika panjang *AB* adalah 4 cm dan panjang *CD* adalah 10 cm hitunglah perbandingan luas segitiga *AGH* dan luas trapesium *ABCD*.

5. Seorang calon dokter diharuskan magang di rumah sakit selama lima hari pada bulan juli 2011. Pimpinan rumah sakit memberikan aturan sebagai berikut.

   a) Magang tidak boleh dilakukan dua hari berturut-turut.

b) Magang hari kelima baru boleh dilakukan setelah empat hari terhitung sejak magang hari keempat. Misalkan magang hari keempat adalah tanggal 20, maka magang hari kelima baru boleh dilaksanakan setidaknya tanggal 24.

Tentukan banyak pilihan jadwal yang mungkin bagi calon dokter tersebut.

6. Perhatikan barisan bilangan asli berikut: 5, 55, 555, 5555, 55555, ... , $\underbrace{5555...55555...}_{n \text{ angka}}$.

   Barisan di atas mempunyai aturan: suku ke-*n* terdiri dari *n* angka (digit) 5. Tunjukkan bahwa ada diantara suku-suku barisan tersebut yang habis dibagi oleh 2011.

B. SOAL HARI KEDUA

1. Diberikan himpunan *n* bilangan asli yang pertama. Jika salah satu bilangan dihapus, maka rata-rata bilangan yang tersisa adalah $21\frac{1}{4}$. Tentukan bilangan yang dihapus tersebut.

2. Ipin dan Upin melakukan permainan Tic Tac Toe dengan sebuah papan berukuran 3 × 3. Ipin mendapat giliran pertama dengan memainkan X. Upin memainkan O. Mereka harus mengisi tanda X atau O pada papan catur secara bergantian. Pemenang pada permainan ini adalah orang pertama yang berhasil menyusun tanda secara horizontal, vertical, atau diagonal. Tentukan banyak posisi akhir yang mungkin, jika Ipin menang pada langkah ke-4. Sebagai contoh, salah satu posisi akhir adalah seperti gambar di samping.

×	O	×
O	×	
×		O

3. Bilangan 1 sampai 10 disusun pada segilima sehinga jumlah tiga bilangan pada setiap sisi adalah sama. Sebagai contoh, pada gambar di samping jumlah tiga bilangan tersebut adalah 16. Untuk semua susunan yang mungkin, tentukan nilai terbesar dan terkecil dari jumlah tiga bilangan tersebut.

4. Didefinisikan

   $$S_{(n)} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\ ,\ k = (-1)^{1+1}1 + (-1)^{2+1}2 + ... + (-1)^{n+1}n$$

   Selidiki apakah ada bilangan bulat positif m dan n yang memenuhi:

   $S(m) + S(n) + S(m + n) = 2011$

5. Perhatikan kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk 2 satuan. Titik *A*, *B*, *C*, dan *D* terletak pada bidang sisi bagian bawah. Titik *I* merupakan titik perpotongan garis diagonal pada bidang sisi atas. Selanjutnya dibuat limas *I.ABCD*. Jika limas *I.ABCD* dipotong oleh bidang diagonal yang menghubungkan titik-titik *A*, *B*, *G*, dan *H*, tentukan volume limas terpancung bagian bawah.

SELEKSI TINGKAT NASIONAL 2012

A. SOAL HARI PERTAMA

1. Jika diketahui himpunan

   $H = \{f(x, y) | (x - y)^2 + x^2 - 15x + 50 = 0$ dengan x dan y bilangan asli$\}$

   Tentukan banyak himpunan bagian dari H.

2. Seorang pesulap menyatakan dirinya ahli menebak pikiran dengan pertunjukan berikut. Salah seorang penonton awalnya diminta secara tersembunyi menuliskan sebuah bilangan lima angka, lalu menguranginya dengan jumlah angka-angka penyusun bilangan tersebut, kemudian menyebutkan empat dari lima angka penyusun bilangan hasil (dengan urutan sebarang). Selanjutnya pesulaptersebut dapat menebak angka yang masing disembunyikan. Sebagai contoh, jika penonton menyebutkan empat bilangan hasil: 0, 1, 2, 3, maka pesulap akan tahu bahwa angka yang disembunyikan adalah 3.

   a. Berilah suatu contoh Anda sendiri dari proses di atas.

   b. Jelaskan secara matematis bentuk umum dari proses tersebut.

3. Pada suatu keranjang buah terdapat 20 apel, 18 jeruk, 16 mangga, 10 nanas dan 6 pepaya. Jika seseroang ingin mengambil 10 buah dari keranjang tersebut, ada berapa banyak komposisi buah terambil yang mungkin?

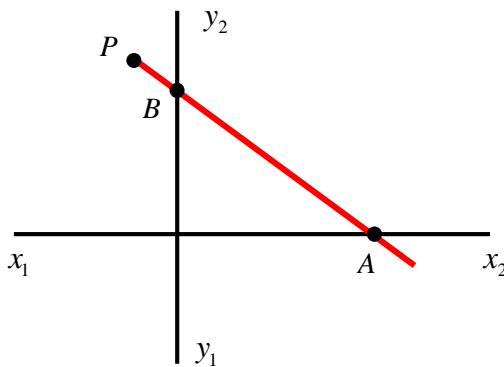
4. Di dalam Taman Khatulistiwa akan dibuat bangunan berbentuk limas dengan alas segitiga samasisi berbahan tembus pandang dengan panjang sisi alas $8\sqrt{3}$ m dan tinggi 8 m.sebuah bola dunia akan ditempatkan di dalam limas tersebut. Dengan mengabaikan ketebalan bahan pembuat limas, tentukan panjang terbesar jari-jari bola dunia yang mungkin dapat dibuat.

5. Berapakah sisa dari $2012^{2012} + 2014^{2012}$ dibagi oleh 2013^2?

B. SOAL HARI KEDUA

1. Pada suatu hari, seorang peneliti menempatkan dua kelompok spesies yang berbeda yakni amoeba dan bakteri pada suatu media yang sama, masing-

masing dalam jumlah tertentu (dalam satuan sel). Peneliti tersebut mengamati bahwa pada hari berikutnya, yakni hari kedua, ternyata setiap sel masing-masing spesies membelah diri menjadi dua sel. Pada hari yang sama setiap sel amoeba memangsa tepat satu sel bakteri. Pangamatan selanjutnya yang dilakukan setiap hari menunjukkan pola yang sama, yakni setiap sel masing-masing spesies membelah diri menjadi dua sel dan kemudian setiap sel amoeba memangsa tepat satu sel bakteri. Pengamatan pada hari ke- 100 menunjukkan bahwa setelah mas9ng-masing spesies membelah diri dan kemudian setiap sel amoeba memangsa tepat satu sel bakteri, ternyata membuat bakteri punah. Tentukan perbandingan jumlah amoeba dengan jumlah bakteri pada hari pertama.

2. Diketahui n adalah bilangan bulat positif. Jika $f(n)=\dfrac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

   Tentukan $f(13)+f(14)+f(15)+\ldots+f(112)$

3. Budi menyusun empat belas buah bola masing-masing berjari-jari 10 cm. Sembilan buah bola pertama diletakkan di atas meja sedemikian sehingga membentuk persegi dan saling bersinggungan. Empat buah bola berikutnya diletakkan di atas sembilan bola pertama sehingga saling bersinggungan. Bola keempat belas ditaruh di atas empat bola tadi, sehingga menyinggung empat bola tersebut. Jika Bambang menpunyai lima puluh lima buah bola yang masing-masing juga berjari-jari 10 cm dan semua bola tersebut disusun mengikuti pola susunan bola yang dilakukan Budi, hitunglah ketinggian pusat bola yang paling atas diukur dari permukaan meja pada susunan bola yang dilakukan Bambang.

4. Diketahui sebuah segitiga *ABC* dengan panjang sisi-sisinya adalah 5 cm, 8 cm, dan $\sqrt{41}$ cm. Tentukan luas maksimum persegipanjang yang mungkin dapat dibuat di dalam segitiga *ABC* tersebut.

5. Ada 12 orang yang antri untuk membeli tiket masuk suatu pertunjukan dengan harga satu tiket adalah Rp 5.000,00. Diketahui 5 orang diantara mereka hanya mempunyai uang kertas Rp 10.000,00 dan sisanya hanya mempunyai uang kertas Rp 5.000,00. Jika penjual tiket awalnya hanya mempunyai uang Rp 5.000,00, berapakah peluang penjual tiket tersebut mempunyai cukup kembalian untuk melayani semua orang sesuai dengan urutan mereka dalam antrian?

SELEKSI TINGKAT NASIONAL 2013

A. SOAL HARI PERTAMA

1. Diketahui f adalah suatu fungsi sehingga $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$ untuk setiap $x \neq 0$. Carilah nilai x yang memenuhi $f(x) = f(-x)$

2. Diketahui ABC adalah segitiga lancip dengan titik-titik sudutnya terletak pada lingkaran yang berpusat di titik O. Titik P terletak pada sisi BC sehingga AP adalah garis tinggi segitiga ABC. Jika $\angle ABC + 30° \leq \angle ACB$, buktikan bahwa $\angle COP + \angle CAB < 90°$.

3. Tentukan semua bilangan asli a, b, dan c yang lebih besar dari 1 dan berbeda, serta memenuhi sifat bahwa abc membagi habis $bc + ac + ab + 2$.

4. Misalkan A, B, dan P adalah paku-paku yang ditanam pada papan ABP. Panjang $AP = a$ satuan dan $BP = b$ satuan. Papan ABP diletakkan pada lintasan x_1x_2 dan y_1y_2 sehingga A hanya bergerak bebas sepanjang x_1x_2 lintasan dan hanya bergerak bebas sepanjang lintasan y_1y_2 seperti pada gambar berikut. Misalkan x adalah jarak titik P terhadap lintasan y_1y_2 dan y adalah terhadap lintasan x_1x_2. Tunjukkan bahwa persamaan lintasan titik P adalah $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

5. Terdapat tiga buah kotak A, B, dan C masingmasing berisi 3 bola berwarna putih dan 2 bola berwarna merah. Selanjutnya dilakukan pengambilan tiga bola dengan aturan sebagai berikut:

1. Tahap ke- 1

Ambil satu bola dari kotak A

2. Tahap ke- 2

- Jika bola yang terambil dari kotak A pada tahap ke- 1 berwarna putih, maka bola tersebut dimasukkan ke kotak B. selanjutnya dari kotak B diambil satu bola, jika yang terambil adalah bola berwarna putih, maka bola tersebut dimasukkan ke kotak C, sedangkan jika yang terambil bola merah, maka bola tersebut dimasukkan ke kotak A.
- Jika bola yang terambil dari kotak A pada tahap ke- 1 berwarna merah, maka bola tersebut dimasukkan ke kotak C. selanjutnya dari kotak C diambil satu bola. Jika yang terambil adalah bola berwarna putih maka bola tersebut dimasukkan ke kotak A, sedangkan jika yang termbil bola merah, maka bola tersebut dimasukkan ke kotak B.

3. Tahap ke- 3

Ambil masing-masing satu bola dari kotak A, B, dan C.

Berapa peluang bahwa semua bola yang terambil pada tahap ke- 3 berwarna merah?

B. SOAL HARI KEDUA

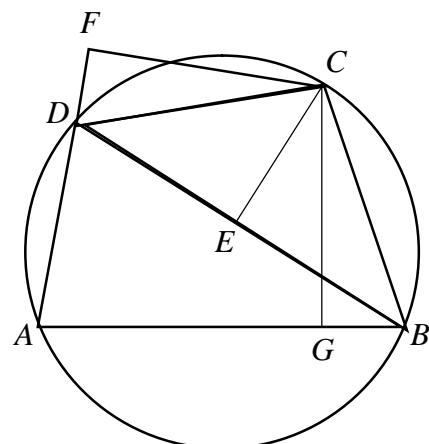
1. Apakah ada bilangan asli n sehingga $n^2 + 5n + 1$ habis dibagi oleh 49? Jelaskan!

2. Diketahui parabola $y = ax^2 + bx + c$ melalui titik (–3,4) dan (3,16), serta tidak memotong sumbu-x. Carilah semua nilai absis yang mungkin untuk titik puncat parabola tersebut.

3. Diketahui $T.ABC$ adalah limas segitiga beraturan dengan panjnag rusuk 2 cm. Titik-titik P, Q, R, dan S berturut-turut merupakan titik berat segitiga ABC, segitiga TAB, segitiga TBC, dan segitiga TCA. Tentukan volume limas segitiga $P.QRS$.

   (catatan: titik berat suatu segitiga adalah perpotongan ketiga garis berat)

4. Pada suatu acara diundang 13 orang tamu istimewa yang terdiri dari 8 orang pria dan 5 orang wanita. Khusus untuk semua tamu istimewa tersebut disediakan 13 tempat duduk pada satu baris khusus. Jika diharapkan tidak ada dua orang wanita yang duduk bersebelahan, tentukan banyak posisi duduk yang mungkin untuk semua tamu istimewa tersebut.

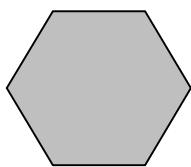
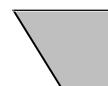
5. Sebuah tabel yang berukuran n baris dan n kolom akan diisi dengan bilangan 1 atau –1 sehingga hasil kali semua bilangan yang terletak dalam setiap baris dan hasil kali semua bilangan yang terletak dalam setiap kolom adalah –1. Berapa banyak cara berbeda untuk mengisi tabel tersebut?

SELEKSI TINGKAT NASIONAL 2014

A. SOAL HARI PERTAMA

1. Bahri bertempat tinggal cukup dekat dengan jam gadang di kota Bukit Tinggi Sumatera Barat. Bahri memiliki jam antik. Pada hari senin tanggal 4 maret 2013 pukul 10.00 pagi, jam antik Bahri terlambat dua menit dibandingkan Jam Gadang. Sehari kemudian, jam antiknya terlambat empat menit dibandingkan Jam Gadang. Tanggal 6 Maret 2013 jam tersebut terlambat enam menit dibandingkan Jam Gadang. Hari-hari berikutnya Bahri mengamati bahwa jam antiknya menunjukkan pola keterlambatan yang sama. Pada hari apa dan tanggal berapakah di tahun 2014 jam antik Bahri (jarum pendek dan jarum panjang) menunjuk angka yang sama dengan Jam Gadang?

2. Pada satu musim kompetisi Liga Sepakbola Indonesia diikuti oleh 20 tim sepakbola. Setiap tim bertanding dengan setiap tim lain sebanyak dua kali. Nila hasil setiap pertandingan adalah 3 jika menang, 1 jika imbang (seri), dan 0 jika kalah. Setiap minggu ada 10 pertandingan yang melibatkan semua tim. Juara kompetisi adalah tim yang mendapat total nilai tertinggi. Pada akhir minggu ke berapakah paling cepat yang mungkin, juara kompetisi pada musim tersebut dapat dipastikan?

3. Perhatikan gambar berikut.

   Segiempat *ABCD* adalah segiempat talibusur (segiempat yang keempat titik sudutnya terletak pada lingkaran). Diketahui *CF* tegak lurus *AF*, *CE* tegak lurus *BD*, dan *CG* tegak lurus *AB*. Apakah pernyataan berikut benar? Tuliskan alasan Anda!

   $$\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{CG} + \frac{AD}{CF}$$

4. Misalkan $2014^{2014} - M$. Jika jumlah semua angka (digit) penyusun bilangan *M* samadengan *A* dan jumlah semua angka penyusun bilangan *A* samdengan *B*, maka tentukan jumlah semua angka penyusun *B*.

5. Tentukan semua bilangan bulat positif $n < 200$ sehingga $n^2 + (n + 1)^2$ adalah kuadrat dari suatu bilangan bulat.

B. SOAL HARI KEDUA

1. Halaman rumah Nurbaya yang berbentuk persegi panjang akan ditutupi sejumlah paving blok yang berbentuk segienam beraturan atau potongannya seperti gambar di bawah. Panjang sisi segienam tersebut adalah 12 cm. Pemasangan paving blok yang lain atau potongannya sehingga seluruh permukaan halaman tertutup penuh. Untuk menutupi seluruh permukaan halaman rumah tersebut diperlukan 603 paving blok. Berapa paving blok tersebut harus dipotong menjadi model A, B, C, dan D untuk keperluan penutupan. Jika diperlukan 17 potongan paving blok model A, berapakah ukuran panjang dan lebar halaman rumah Nurbaya? Hitung juga berapa banyak masing-masing potongan paving blok model B, C, dan D yang digunakan.

2. Diketahui persegi $PQRS$. Jika salah satu sisinya terletak pada garis $y – 2x – 17$ dan dua titik sudutnya terletak pada parabola $y = x^2$, tentukan luas maksimum persegi $PQRS$ yang mungkin.

3. Pada limas segitiga $T.ABC$, titik E, F, G, dan H berturut-turut terletak pada AB, AC, TC, dan TB sehingga $EA : EB = FA : FC = HB : HT = GC : GT = 2 : 1$. Tentukan perbandingan volume kedua bagian limas segitiga yang terbagi oleh bidang $EFGH$.

4. Diketahui x bilangan bulat tak negatif dan y bilangan bulat. Tentukan semua pasangan (x, y) yang memenuhi $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$.

5. Pelatih tim nasional Bola Basket Indonesia akan memilih pemain untuk menjadi anggota tim inti. Pelatih akan menilai lima pemain A, B, C, D, dan E dalam satu pertandingan simulasi (atau uji coba) dengan total waktu pertandingan 80 menit. Setiap saat hanya ada satu di antara lima pemain tersebut yang bermain. Tidak ada pembatas banyaknya pergantian pemain selama pertandingan. Total waktu bermain untuk masing-masing pemain A, B, dan C adalah kelipatan 5 menit, sedangkan total waktu bermain masing-masing pemain D dan E adalah kelipatan 7 menit. Berapakah banyak cara setiap pemain berada di lapangan berdasarkan total waktu bermain?

CMO 2012

1. Let x, y and z be positive real numbers, show that $x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq 4xyz - 4$.

2. For any positive integers n and k, let $L(n, k)$ be the least common multiple of the k consecutive integers $n, n + 1, \ldots, n + k - 2$. Show that for any integer b there exist integers n and k such that $L(n, k) > b\, L(n + 1, k)$.

3. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral and let P be the point of intersection of AC and BD. Suppose that $AC + AD = BC + BD$. Prove that the internal angle bisectors of $\angle ACB$, $\angle ADB$, and $\angle APB$ meet at a common point.

4. A number of robots are placed on the squares of a finite, rectangular grid of squares. A square can hold any number of robots. Every edge of the grid os classified as either possable or impassable. All edges on the boundary of the grid are impassable.

   You can give any of the commonds *up*, *down*, *left*, or *right*. All of the robots then simultaneously try to move in the specified direction. If the edge adjacent to a robot in that direction is passable, the robot moves across the edge and into the next square. Otherwise, the robot remains on its current square. You can the give another command of *up*, *down*, *left*, or *rigth*, the another, for as long as you want.

   Suppose the fot any individual robot, and any square on the grid, there is a finite suquence of commands that will move that robot to the square. Prove tha you can also give a finite sequence of commands such that all of the robot end up on the same square at the same time.

5. A bookshelf contains n volume, labelled 1 to n in some order. The librarian wishes to put them in the correct order as follows. The librarian selects a volume that is too far to the right, say the volume with label k, takes it out, and inserts it so that it is in the k-th place. For example, if the bookshelf contains the volumes 1 2, 3, 4 in that order, the librarian could take out volume 2 and place it in the second positition. The books will then be in the correct order 1, 2, 3, 4.

   a. Show that if this prosses is repeated, then, however the librarian makes the selections, all the volumes will eventually be in the correct order.

   b. What is the largest number of steps that this procces can take?

CMO 2013

1. Determine all polynomials $P(x)$ with real coefficients such that

$$(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)$$

Is a constant polynomial.

2. The squence $a_1, a_2, \ldots, a_n$ consists of the numbers 1, 2, …, n in some order. For which positive integers n is it possible that the $n + 1$ numbers 0, $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \ldots, a_1+a_2+\cdots+a_n$ all have different remainders when divided by $n + 1$?

3. Let G be the centroid of a right-angled triangle ABC with $\angle BCA = 90°$. Let P be the point on ray AG such that $\angle CPA = \angle CAB$, and let Q be the point on ray BG such that $\angle CQB = \angle ABC$. Prove that the circumcircles of triangles AQG and BPG meet at a point on side AB.

4. Let n be a possitive integer. For any positive integer j and positive real number r, define $f_j(r)$ and $g_j(r)$ by

$$f_j(r) = \min(jr, n) + \min\left(\frac{j}{r}, n\right), \text{ and } g_j(r) = \min(\lceil jr \rceil, n) + \min\left(\left\lceil \frac{j}{r} \right\rceil, n\right),$$

where $\lceil x \rceil$ denotes the smallest integer greater than or equal to x. Prove that

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(r) \le n^2 + n \le \sum_{j=1}^{n} g_j(r)$$

For all positive real numbers r.

5. Let O denote the circumcentre of an acute-angled triange ABC. Let point P on side AB be such that $\angle BOP = \angle ABC$, and let point Q on side AC be such that $\angle COQ = \angle ACB$. Prove that the reflection of BC in the line PQ is tangent to the circumcircle of triangle APQ.

CMO 2014

1. Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be positive real numbers whose product is 1. Show that the sum

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\frac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

Is greater than or equal to $\frac{2^n-1}{2^n}$.

2. Let m and n be odd positive integers. Each square of an m by n board is coloured red or blue. A row is said to be red-dominated if there are more red squares than blue squares in the row. A column is said to be blue-dominated if there are more blue squares than red squares in the column. Determine the maximum possible value of the numbers of red-dominated rows plus the number of blue-dominated columns. express your answer in terms of m dan n.

3. Let p be a fixed odd prime. A p-tuple $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p)$ of integers is said to be good if

   (i) $0 \le a_i \le p-1$ for all i, and

   (ii) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_p$ is not divisible by p, and

   (iii) $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_pa_1$ is divisible by p.

   Determine the number of good p-tuples.

4. The quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle. The point P lies in the interior of $ABCD$, and $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \angle PDA$. The lines AD and BC meet at Q, and the lines AB and CD meet at R. Prove that the lines PQ and PR from the same angle as the diagonals of $ABCD$.

5. Fix positive integers n and $k \ge 2$. A list of n integers is written in a row on a blackboard. You can choose a contingous block of integers, and I will either add 1 to all of them of subtract 1 from all of them. You can repeat this step as often as you like, possibly adapting your selections based on what I do. Prove that after a finite number of steps, you can reach a state where at least $n - k + 2$ of the numbers on the blackboard are all simultaneously divisible by k.

BAB

8

SOLUSI

OLIMPIADE MATEMATIKA 2013

SUBBAB

Solusi tahun 2013:

- **Tingkat Kota**
- **Tingkat Provinsi**
- **Tingkat Nasional**

SELEKSI TINGKAT KOTA (BAGIAN A: SOAL PILIHAN GANDA)

1. Bentuk $x^4 - 1$ mempunyai faktor sebanyak ...

   a. 3 c. 5 e. 6

   b. 4 d. 6

   Jawab:

   $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2$

   $= (x^2 + 1)(x^2 - 1)$

   $= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

   Jadi, bentuk $x^4 - 1$ mempunyai faktor sebanyak 3.

2. Jika a, b, c, dan d adalah bilangan bulat positif dibagi 13 berturut-turut bersisa 12, 9, 11, dan 7, maka $3a + 4b - 3c + 2d$ dibagi 13 akan bersisa ...

   a. 0 c. 7 e. 11

   b. 1 d. 9

   Jawab:

   $a = 13.r + 12$; $b = 13.s + 9$; $c = 13.t + 11$; $d = 13.u + 7$

   $3a + 4b - 3c + 2d = 3(13.r + 12) + 4(13.s + 9) - 3(13.t + 11) + 2(13.u + 7)$

   $= 39r + 12 + 42s + 36 - 39t - 33 + 26u + 14$

   $= 39r + 42s - 39t + 26u + 36 + 36 - 33 + 14$

   $= 13 \cdot (3r + 4s - 3t + 2u) + 53$

   $= 13 \cdot (3r + 4s - 3t + 2u) + 13 \cdot 4 + 1$ (bersisa 1)

   Jadi, $3a + 4b - 3c + 2d$ dibagi 13 akan bersisa 1.

3. Nilai rata-rata kelas A adalah 73, sedangkan nilai rata-rata kelas B adalah 88. Jika jumlah siswa kedua kelas tersebut adalah 75 dan nilai rata-rata kedua kelas adalah 80, maka banyak siswa kelas A adalah ... orang

   a. 35 c. 40 e. 45

   b. 38 d. 42

   Jawab:

$\bar{x}_a = 73$

$\bar{x}_b = 88$

$n_a + n_b = 75$

$n_b = 75 - n_a$

$\bar{x}_{gabungan} = 80$

$$\bar{x}_{gabungan} = \frac{n_a \cdot \bar{x}_a + n_b \cdot \bar{x}_b}{n_a + n_b}$$

$$80 = \frac{n_a \cdot 73 + (75 - n_a) \cdot 88}{75}$$

$80 \times 75 = 75n_a + 75 \times 88 - 88n_a$

$6000 = 6600 - 15n_a$

$15n_a = 6600 - 6000$

$15n_a = 600$

$$n_a = \frac{600}{15}$$

$n_a = 40$

Jadi, banyak siswa kelas A adalah 40 orang.

4. Suatu hari perbandingan jumlah uang Netty dan Agit adalah 2 : 1. Sehari kemudian Netty memberikan uangnya sejumlah Rp100.000,00 kepada Agit. Sekarang perbandingan uang Netty dan Agit adalah 1 : 3. Jumlah uang Netty sekarang adalah Rp. ...

   a. 240.000,00

   b. 180.000,00

   c. 120.000,00

   d. 100.000,00

   e. 60.000,00

   Jawab:

Misal:

Uang Netty mula-mula = N

Uang Agit mula-mula = A

$\frac{N}{A} = \frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad N = 2A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{N}{2}$

$\frac{(N - 100000)}{(A + 100000)} = \frac{1}{3}$

$3(N - 100000) = 1(A + 100000)$

$3N - 300000 = A + 100000$

$3N - A = 100000 + 300000 = 400000$

Substitusikan $A = \frac{N}{2}$ ke persamaan $3N - A = 400000$:

$3N - A = 400000$

$3N - \frac{N}{2} = 400000$

$\frac{6N}{2} - \frac{N}{2} = 400000$

$\frac{5N}{2} = 400000$

$5N = 400000 \times 2 = 800000$

$N = \frac{800000}{5} = 160000$

Jadi, jumlah uang Netty sekarang adalah 160000 – 100000 = 60000

5. Jika f adalah fungsi linier, $f(1) = 2000$, dan $f(x + 1) + 12 = f(x)$, maka nilai $f(100) = ...$

a. 762 c. 832 e. 1012

b. 812 d. 912

Jawab:

$f(1) = 2000$

$f(x + 1) + 12 = f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x + 1) = f(x) - 12$

Sehingga:

$f(x + 1) = f(x) - 12$

untuk $x = 1$

$f(x + 1) = f(x) - 12$

$f(1 + 1) = f(1) - 12$

$f(2) = 2000 - 12$

untuk $x = 2$

$f(x + 1) = f(x) - 12$

$f(2 + 1) = f(2) - 12$

$f(3) = (2000 - 12) - 12$

untuk $x = 3$

$f(x + 1) = f(x) - 12$

$f(3 + 1) = f(3) - 12$

$f(4) = (2000 - 2\cdot(12)) - 12$

untuk $x = 4$

$f(x + 1) = f(x) - 12$

$f(4 + 1) = f(4) - 12$

$f(5) = (2000 - 3\cdot(12)) - 12$

$\vdots$

untuk $x = x$

$f(x + 1) = f(x) - 12$

$f(x + 1) = [2000 - (x - 1)(12)] - 12$

$f(x + 1) = [2000 - (12x - 12)] - 12$

$f(x + 1) = 2000 - 12x + 12 - 12$

$f(x + 1) = 2000 - 12x$

Maka:

$f(100) = f(99 + 1) \quad \rightarrow x = 99$

$f(99 + 1) = 2000 - 12x$

$f(99 + 1) = 2000 - 12 \times 99$

$f(100) = 2000 - 1188$

$f(100) = 812$

Jadi, nilai $f(100) = 812$.

6. Diketahui $H = \{k \mid x^2 - 1 < x^2 + k < 2(x + 1)$, dengan x dan k bilangan bulat}. Banyaknya himpunan bagian dari himpunan H adalah ...

   a. 4 c. 16 e. 64

   b. 8 d. 32

   Jawab:

   $H = \{k \mid x^2 - 1 < x^2 + k < 2(x + 1)$, dengan x dan k bilangan bulat}

   Sehingga:

   $x^2 - 1 < x^2 + k < 2(x + 1)$

   $x^2 - 1 < x^2 + k < 2x + 2$

   $x^2 - 1 - x^2 < k < 2x + 2 - x^2$

   $-1 < k < -x^2 + 2x + 2$

   Untuk $x = 0$

   $-1 < k < -x^2 + 2x + 2$

   $-1 < k < -(0^2) + 2 \cdot 0 + 2$

   $-1 < k < 0 + 0 + 2$

   $-1 < k < 2 \quad \rightarrow \quad k = 0, 1$ (memenuhi)

   Untuk $x = 1$

   $-1 < k < -x^2 + 2x + 2$

$-1 < k < -(1^2) + 2 \cdot 1 + 2$

$-1 < k < -1 + 2 + 2$

$-1 < k < 3 \quad \rightarrow \quad k = 0, 1, 2$ (memenuhi)

Untuk $x = 2$

$-1 < k < -x^2 + 2x + 2$

$-1 < k < -(2^2) + 2 \cdot 2 + 2$

$-1 < k < -4 + 4 + 2$

$-1 < k < 2 \quad \rightarrow \quad k = 0, 1$ (memenuhi)

Untuk $x = 3$

$-1 < k < -x^2 + 2x + 2$

$-1 < k < -(3^2) + 2 \cdot 3 + 2$

$-1 < k < -9 + 6 + 2$

$-1 < k < -1 \quad \rightarrow$ (tidak memenuhi)

Jadi, H = {0, 1, 2} $\quad \rightarrow \quad n(\text{H}) = 3$

Jadi, banyak himpunan bagian dari H adalah $2^{n(H)} = 2^3 = 8$

7. Tiga orang A, B, dan C pinjam meminjam kelereng. Pada awalnya ketiga orang tersebut memiliki sejumlah kelereng tertentu dan selama pinjam meminjam mereka tidak melakukan penambahan kelereng selain melalui pinjam meminjam diantara ketiga orang tersebut. Pada suatu hari A meminjami sejumlah kelereng kepada B dan C sehingga jumlah kelereng B dan C masing-masing menjadi dua kali lipat jumlah kelereng sebelumnya. Hari berikutnya B meminjami sejumlah kelereng kepada A dan C sehingga jumlah kelereng A dan C masing-masing menjadi dua kali lipat jumlah kelereng sebelumnya. Hari terakhir C meminjami sejumlah kelereng kepada A dan B sehingga jumlah kelereng A dan B masing-masing menjadi dua kali lipat jumlah kelereng sebelumnya. Setelah dihitung akhirnya masing-masing memiliki 16 kelereng. Banyak kelereng A mula-mula adalah ...

   a. 8 c. 26 e. 32

   b. 14 d. 28

Jawab:

Kelereng awal:

A = x, B = y, C = z

Hari pertama:

A = $x - y - z$

B = $2y$

C = $2z$

Hari kedua:

A = $2(x - y - z) = 2x - 2y - 2z$

B = $2y - (x - y - z) - 2z$

= $2y - x + y + z - 2z$

= $3y - x - z$

C = $4z$

Hari ketiga:

A = $2(2x - 2y - 2z)$

= $4x - 4y - 4z$

B = $2(3y - x - z)$

= $6y - 2x - 2z$

= $-2x + 6y - 2z$

C = $4z - (2x - 2y - 2z) - (3y - x - z)$

= $4z - 2x + 2y + 2z - 3y + x + z$

= $7z - x - y$

= $-x - y + 7z$

A $\rightarrow 4x - 4y - 4z = 16$

$\rightarrow x - y - z = 4$ ... persamaan (1)

B $\rightarrow -2x + 6y - 2z = 16$

$\rightarrow -x + 3y - z = 8$ ... persamaan (2)

C $\rightarrow -x - y + 7z = 16$ ... persamaan (3)

Eliminasi (metode penghapus) persamaan (2) dan (1):

$$\begin{array}{r} -x+3y-z=8 \\ x-y-z=4 - \\ \hline -2x+4y=4 \end{array} \quad \dots (4)$$

Eliminasi persamaan (1) dan (3):

$$\begin{array}{r} 7x-7y-7z=28 \\ -x-y+7z=4 - \\ \hline 6x-8y=44 \end{array}$$

$3x - 4y = 22$ ... (5)

Eliminasi persamaan (5) dan (4):

$$\begin{array}{r} 3x-4y=28 \\ -2x+4y=4 + \\ \hline x=26 \end{array}$$

Jadi, banyak kelereng A mula-mula adalah 26.

8. Jika jumlah dua bilangan positif adalah 24, maka nilai terkecil dari jumlah kebalikan bilangan-bilangan tersebut adalah ...

a. 1

b. $\frac{1}{2}$

c. $\frac{1}{3}$

d. $\frac{1}{4}$

e. $\frac{1}{6}$

Jawab:

$x + y = 24$

bentuk $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ merupakan nilai terkecil

$x = 12$ dan $y = 12$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{12}+\frac{1}{12}$$

$$= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Jadi, nilai terkecil dari jumlah kebalikannya adalah $\frac{1}{6}$.

9. Jika $\frac{2013}{7000}$ ditulis dalam bentuk desimal, maka angka ke-2013 di belakang koma adalah..

   a. 1　　c. 4　　e. 8

   b. 2　　d. 5

   Jawab:

   $\frac{2013}{7000}$ = 0,287571428571428...

   0, 2 8 7 | 5 7 1 4 2 8 | 5 7 1 4 2 8

   3 digit tidak berulang dan angka setelahnya merupakan 6 digit berulang (periode 6)

0	2	8	7	5	7	1	4	2	8
3 tidak berulang				6 berulang					
Memberikan sisa				⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓
				1	2	3	4	5	6

   Angka 2013 di belakang koma dapat ditemukan dengan:

   (2013 – 3) dibagi 6　$\rightarrow$　2010 = 6·(335) + 0

   2010 dibagi 6 memberikan sisa 0 (sisa 0 = sisa 6) sehingga angka 2013 di belakang koma adalah 8.

   Jadi, angka ke-2013 di belakang koma adalah 8.

10. Diberikan angka disusun sebagai berikut: 987654321. Berapa banyak tanda operasi penjumlahan harus disisipkan di antara angka-angka tersebut agar menghasilkan jumlah 99?

a. 3 c. 5 e. 8

b. 4 d. 7

Jawab:

987654321

9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99

Jadi, banyaknya tanda operasi penjumlahan ada 7.

11. Jika barisan berikut adalah barisan bilangan bulat positif berurutan yang dihilangkan semua bilangan kelipatan tiga: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, ..., maka suku ke-67 barisan tersebut adalah ...

a. 59 c. 86 e. 100

b. 62 d. 92

Jawab:

Barisan: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, ...

Dari angka 1 sampai ke- 100, angka kelipatan 3 yang harus dihilangkan sebanyak: $\frac{99}{3}$ = 33 angka.

Sehingga angka 100 merupakan suku ke 100 – 33 = 67

Jadi, suku ke-67 barisan tersebut adalah 100.

12. Jika rata-rata 51 bilangan bulat berurutan adalah 10, maka bilangan terkecil dari semua bilangan tersebut adalah ...

a. 5 c. –5 e. –15

b. 0 d. –13

Jawab:

Rata-rata 51 bilangan bulat berurutan adalah 10, sehingga:

...	10	10	10	10	10	10	...
Bilangan ke	24	25	26	27	28	29	
...	8	9	10	11	12	13	...

Agar berurutan maka angka 10 harus berada pada bilangan ke 26.

Jadi, bilangan terkecil dari semua bilangan tersebut adalah 10 – 25 = –15

13. Sebuah kantong berisi 15 bola merah, 12 bola biru, dan 3 bola hijau. Diambil sebuah bola secara acak sebanyak 2 kali tanpa pengembalian. Peluang bola yang terambil merah pada pengambilan pertama dan hijau pada pengambilan kedua adalah ...

    a. $\frac{1}{20}$ c. $\frac{1}{5}$ e. $\frac{6}{29}$

    b. $\frac{3}{58}$ d. $\frac{3}{29}$

    Jawab:

    Merah = 15

    Biru = 12

    Hijau = 3

    Total = 15 + 12 + 3 = 30

    Peluang bola yang terambil merah pada pengambilan pertama dan hijau pada pengambilan kedua:

    $$\frac{15}{30}\times\frac{3}{29} = \frac{45}{870} = \frac{3}{58}$$

    Jadi, peluangnya adalah $\frac{3}{58}$.

14. Lima orang anak akan naik mobil dengan kapasitas enam tempat duduk, yakni dua di depan termasuk pengemudi (Sopir), dua di tengah, dan dua di belakang. Jika hanya ada dua orang yang bisa mengemudi, banyak cara mengatur tempat duduk mereka adalah ...

    a. 120 c. 220 e. 280

    b. 200 d. 240

    Jawab:

    Misal:

    Yang dapat menjadi sopir: A dan B

Penumpang: A, B, C, D, dan E

Sehingga akan terdapat dua pola tempat duduk (Pola I):

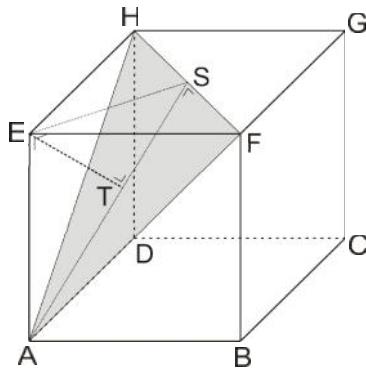
B	A
C	D
E	

Banyak cara mengatur tempat duduk pada pola I:

$${}_5P_4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

Pola II:

A	B
C	D
E	

Banyak cara mengatur tempat duduk pada pola II:

$${}_5P_4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

Jadi, banyak cara mengatur tempat duduk mereka adalah 120 + 120 = 240.

15. Jika diketahui panjang rusuk kubus *ABCD.EFGH* adalah 1 satuan, maka jarak titik *E* ke bidang datar *AFH* adalah ... satuan

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c. $\frac{1}{3}$ d. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Jawab:

Panjang rusuk kubus $ABCD.EFGH$ = 1 satuan

AE = 1 satuan

$AF = FH = EG = \sqrt{2}$ satuan

$FS = ES = \frac{1}{2} \times FH = \frac{\sqrt{2}}{2}$ satuan

Perhatikan segitiga AFS:

$$AS = \sqrt{AF^2 - FS^2}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2 - \frac{2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{8}{4} - \frac{2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Perhatikan segitiga ASE:

Luas $\Delta ASE = \frac{1}{2} \times AE \times ES$

$$\frac{1}{2} \times AS \times ET = \frac{1}{2} \times AE \times ES$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times ET = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{4} ET = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$ET = \frac{\sqrt{2}}{4} : \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{4}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{\sqrt{4 \times 3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Jadi, jarak titik E ke bidang datar AFH adalah $\frac{\sqrt{3}}{3}$ satuan.

16. Diketahui sekelompok data memiliki sifat-sifat berikut:

i. Terdiri dari 5 data bilangan bulat positif dengan rataan = 7

ii. Median = modus = 9

Jika jangkauan didefinisikan sebagai selisih data terbesar dengan data terkecil, maka jangkauan terbesar yang mungkin adalah ...

a. 11

b. 12

c. 13

d. 14

e. 15

Jawab:

5 data bilangan bulat positif dengan rataan = 7

Median = Modus = 9

Berarti:

7 7 7 7 7 $\rightarrow$ 5 data dengan rata-rata 7

6 6 9 7 7 $\rightarrow$ mediannya 9, rata-ratanya 7

1 2 9 9 14 $\rightarrow$ rata-ratanya 7, mediannya 9, modusnya 9, jangkuannya terbesar

Jangkuannya = 14 – 1 = 13

Jadi, jangkauan terbesar yang mungkin adalah 13.

17. Di dalam suatu keranjang terdapat 12 apel Malang, dua diantaranya diketahui busuk. Jika diambil 3 apel secara acak (random), maka peluang tepat satu di antaranya busuk adalah ...

a. $\frac{9}{22}$
b. $\frac{5}{11}$
c. $\frac{4}{11}$
d. $\frac{9}{44}$
e. $\frac{5}{22}$

Jawab:

12 apel $\rightarrow$ 10 baik dan 2 busuk

Peluang mendapatkan 1 busuk dalam 3 kali pengambilan, terdapat 3 kemungkinan:

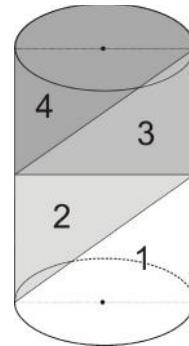
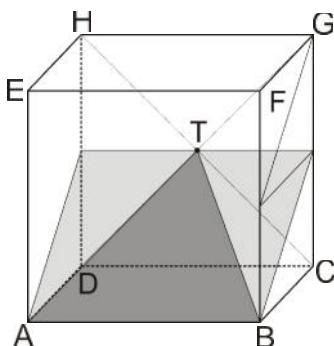
I. Apel busuk terambil pada pengambilan pertama: $\frac{2}{12} \times \frac{10}{11} \times \frac{9}{10} = \frac{3}{22}$

II. Apel busuk terambil pada pengambilan kedua: $\frac{10}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{9}{10} = \frac{3}{22}$

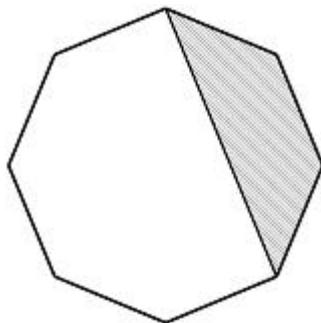
III. Apel busuk terambil pada pengambilan kedua: $\frac{10}{12} \times \frac{9}{11} \times \frac{2}{10} = \frac{3}{22}$

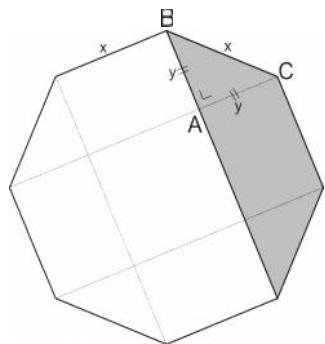
Jadi, peluang tepat satu di antaranya busuk adalah $\frac{3}{22} + \frac{3}{22} + \frac{3}{22} = \frac{9}{22}$

18. Sebuah silinder tegak diletakkan di dalam kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang sisi kubus 2 m. Selanjutnya silinder dipancung oleh bidang miring yang melalui titik *A*, *B*, dan *T* dimana *T* adalah titik perpotongan diagonal bidang *CDHG*. Volume terbesar silinder terpancung ini adalah ... m^3.

a. $\frac{3\pi}{2}$
b. $\frac{4\pi}{3}$
c. $\frac{5\pi}{4}$
d. $\frac{5\pi}{3}$
e. $\frac{7\pi}{5}$

Jawab:

Agar volume silinder maksimal maka diameter silinder harus sama dengan panjang sisi kubus, yaitu 2 m.

Jari-jari silinder = 1 m

Tinggi silinder = 2 m

Jika dilakukan pemancungan kubus *ABCD.EFGH* melalui bidang *ABT*, maka seperti tampak pada gambar silinder akan kehilangan volume pada bagian 1. Dengan demikian volume silinder hanya tinggal $\frac{3}{4}$ nya saja.

Jadi, volume silinder terpancung = $\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot t = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$

19. Jika gambar di bawah adalah segi delapan beraturan, maka perbandingan luas antara daerah yang diarsir dan luas segi delapan beraturan adalah ...

a. 1 : 3

b. 1 : 4

c. 2 : 5

d. 3 : 8

e. 3 : 7

Jawab:

Segidelapan tersebut terdiri dari:

- 4 segitiga siku-siku sama kaki (yang sama persis)
- 4 persegipanjang (yang sama persis)
- 1 persegi.

Misal:

Panjang sisi segi delapan adalah x

$AC = AB = y$

Perhatikan segitiga siku-siku sama kaki pada gambar:

$AC^2 + AB^2 = BC^2$

$y^2 + y^2 = x^2$

$2y^2 = x^2$

$$y^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}x}{2}$$

Luas arsiran:

$$\begin{aligned} \text{Luas arsiran} &= 2 \times \text{Luas segitiga} + \text{Luas persegipanjang} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \cdot y \cdot y + y \cdot x \\ &= y^2 + yx \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{\sqrt{2}x}{2} \cdot x$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{\sqrt{2}x^2}{2} = \frac{x^2 \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$$

Luas segidelapan:

Luas segidelapan = 4 × Luas segitiga + 4 × Luas persegipanjang + Luas persegi

$$= 4 \times \frac{1}{2} \cdot y \cdot y + 4 \cdot y \cdot x + x^2$$

$$= 2y^2 + 4yx + x^2$$

$$= 2 \times \frac{x^2}{2} + 4 \times \frac{\sqrt{2}x^2}{2} + x^2$$

$$= x^2 + 2\sqrt{2}\,x^2 + x^2$$

$$= 2x^2 + 2\sqrt{2}\,x^2$$

$$= 2x^2\,(1 + \sqrt{2}\,x^2)$$

$$\frac{\textit{Luas arsiran}}{\textit{Luas segidelapan}} = \frac{\frac{x^2}{2} \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)}{2x^2 \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{2} \quad \rightarrow \quad = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad = \frac{1}{4}$$

Jadi, perbandingan luas antara daerah yang diarsir dan luas segi delapan beraturan adalah 1 : 4.

20. Beberapa bilangan empat angka memiliki angka-angka penyusun tak nol yang saling berbeda dan berjumlah 10. Banyak bilangan yang dimaksud adalah ...

a. 24 c. 20 e. 16

b. 22 d. 18

Jawab:

Aturan:

- Terdapat 4 digit bilangan saling berbeda
- Angka penyusun tidak nol
- Jumlah semua digit adalah 10

Misalkan saja digit-digit tersebut adalah A, B, C, dan D. perhatikan tabel di bawah.

percobaan	A	B	C	D	keterangan
I	9	1	0	0	Tidak memenuhi
II	8	1	1	0	Tidak memenuhi
III	7	2	1	0	Tidak memenuhi
IV	6	2	1	1	Tidak memenuhi
V	5	2	3	0	Tidak memenuhi
VI	4	1	2	3	Memenuhi

Banyak bilangan yang dapat disusun dari angka 4, 1, 2, dan 3 adalah:

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$

Jadi, banyak bilangan yang dimaksud adalah 24.

SELEKSI TINGKAT KOTA (BAGIAN B: SOAL ISIAN SINGKAT)

1. Tino sedang memanjat tangga dan sekarang dia berada tepat di tengah tangga. Jika ia naik 3 anak tangga ke atas, kemudian turun 5 anak tangga, serta naik kembali 10 anak tangga, maka Tino akan sampai di puncak tangga. Banyak anak tangga yang dimiliki tangga tersebut adalah ...

   Jawab:

   Misal:

   Banyak anak tangga = x

   Karena Tino tepat berada ditengah tangga maka banyak anak tangganya adalah ganjil.

   Tangga paling tengah = $\frac{x+1}{2}$

   sehingga:

   $\frac{x+1}{2} + 3 - 5 + 10 = x$

   $\frac{x+1}{2} + 8 = x$

   $\frac{x+1}{2} = x - 8$

   $x + 1 = 2 \cdot (x - 8)$

   $x + 1 = 2x - 16$

   $2x - x = 1 + 16$

   $x = 17$

   Jadi, banyak anak tangga yang dimiliki tangga tersebut adalah 17.

2. Ani mempunyai uang Rp. 16.500,00. Sejumlah uang itu akan dihabiskan untuk membeli 6 buah peralatan sekolah. Ia membeli beberapa pensil dengan harga Rp. 2.000,00 per pensil. Ia membeli beberapa buku dengan harga Rp. 2.500,00 per buku, dan ia juga membeli beberapa kotak pensil dengan harga Rp. 4.000,00 per kotak pensil. Banyak buku yang dibeli Ani adalah ...

   Jawab:

Misal:

Pensil = x, Buku = y, Kotak pensil = z

$x + y + z = 6$

$4x + 5y + 8z = 33$

Untuk $x = 3$, $y = 1$, $x = 2$

$4x + 5y + 8z = 33$

$4(3) + 5(1) + 8(2) = 33$

$12 + 5 + 16 = 33$

$33 = 33$ (benar)

Jadi, banyak buku yang dibeli Ani adalah 1.

3. Banyak bilangan positif n sehingga $\dfrac{2013}{n^2 - 3}$ berupa bilangan bulat positif adalah ...

Jawab:

Agar $\dfrac{2013}{n^2 - 3}$ merupakan bilangan bulat positif, untuk bilangan positif n maka harus memenuhi:

$n^2 - 3 =$ (faktor dari 2013)

(faktor dari 2013) $+ 3 = n^2$

$2013 = 3 \times 671$

$= 3 \times 11 \times 61 \quad \rightarrow \quad$ faktornya $\{1, 3, 11, 33, 61, 183, 671, 2013\}$

Sehingga: (faktor dari 2013) $+ 3 = n^2$

$1 + 3 = 4 \quad \rightarrow \quad n = 2$

$3 + 3 = 6 \quad \rightarrow \quad n = \sqrt{6}$

$11 + 3 = 14 \quad \rightarrow \quad n = \sqrt{14}$

$33 + 3 = 36 \quad \rightarrow \quad n = 2$

$61 + 3 = 64 \rightarrow n = 2$

$183 + 3 = 186 \rightarrow n = \sqrt{186}$

$671 + 3 = 674 \rightarrow n = \sqrt{674}$

$2013 + 3 = 2016 \rightarrow n = \sqrt{2016}$

Dengan demikian nilai n yang memenuhi ada 8.

4. Diberikan tabel bilangan berikut.

–7	x	–8
$2y$	–5	–4
$x - 2$	–10	y

Jika diketahui bahwa jumlah masing-masing baris, kolom, dan diagonal adalah sama, maka nilai $x + y$ adalah ...

Jawab:

$-7 + 2y + x - 2 = -8 - 4 + y$

$2y + x - 9 = -12 + y$

$2y - y + x = -12 + 9$

$y + x = -3$

Jadi, nilai $x + y$ adalah –3.

5. Jika himpunan A mempunyai anggota sebanyak x dan himpunan B mempunyai anggota sebanyak y, $x \leq y$, maka himpunan A $\cup$ B mempunyai anggota (maksimum) sebanyak ...

Jawab:

$n(A) = x$

$n(B) = y$

$x \leq y$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ $\rightarrow$ $n(A \cup B)$ maksimal jika $n(A \cap B) = 0$

$n(A \cup B) = x + y - 0$

$n(A \cup B) = x + y$

karena $x \leq y$ maka dengan mengambil $x = y$ akan diperoleh:

$n(A \cup B) = y + y$

$n(A \cup B) = 2y$

6. Semua bilangan asli n yang memenuhi sifat bahwa $6n^2 + 5n - 4$ adalah bilangan prima adalah ...

   Jawab:

   $6n^2 + 5n - 4 = (3n + 4)(2n - 1)$

   Bilangan prima merupakan bilangan yang hanya mempunyai dua faktor, sehingga:

   Untuk $n = 1$, maka:

   $(3n + 4)(2n - 1) \Leftrightarrow (3 \cdot 1 + 4)(2 \cdot 1 - 1)$

   $\Leftrightarrow (3 + 4)(2 - 1) = 7$ $\rightarrow$ bilangan prima

   Untuk $n = 2$, maka:

   $(3n + 4)(2n - 1) \Leftrightarrow (3 \cdot 2 + 4)(2 \cdot 2 - 1)$

   $\Leftrightarrow (6 + 4)(4 - 1) = 30$ $\rightarrow$ buka bilangan prima

   Untuk $n = 3$, maka:

   $(3n + 4)(2n - 1) \Leftrightarrow (3 \cdot 3 + 4)(2 \cdot 3 - 1)$

   $\Leftrightarrow (9 + 4)(6 - 1) = 65$ $\rightarrow$ bukan bilangan prima

   Untuk n seterusnya pasti hasilnya akan memiliki faktor lebih dari dua, jadi bukan merupakan bilangan prima.

   Jadi, bilangan asli n yang memenuhi adalah 1.

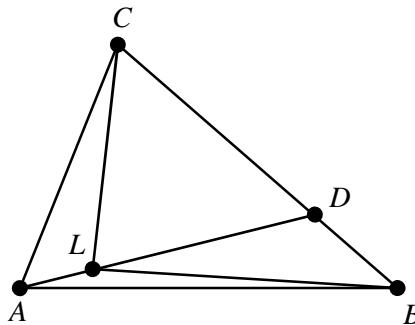
7. Jika $S_1 = 1,\ S_2 = S_1 - 3,\ S_3 = S_2 + 5,\ S_4 = S_3 - 7,\ S_5 = S_4 + 9,\ ...$ adalah suku-suku suatu barisan bilangan, maka S_{2013} = ...

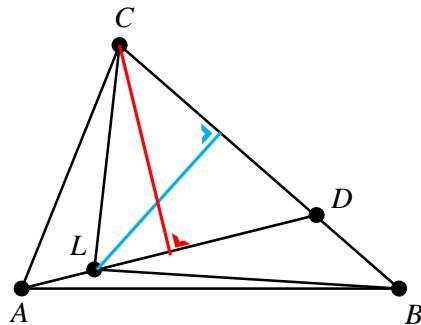
   Jawab:

   $S_1 = 1$

   $S_2 = S_1 - 3 = 1 - 3 = -2$

   $S_3 = S_2 + 5 = -2 + 5 = 3$

   $S_4 = S_3 - 7 = 3 - 7 = -4$

   $S_5 = S_4 + 9 = -4 + 9 = 5$

   $\vdots$

   $S_{2013} = 2013$

   Jadi, $S_{2013} = 2013$.

8. Pada ΔABC terdapat titik D pada BC sehingga $BD : DC = 1 : 3$. Titik L pada AD sehingga $AL : LD = 1 : 4$. Perbandingan luas ΔACL dan ΔBDL adalah ...

   Jawab:

Perhatikan segitiga ADC. $AL : LD = 1 : 4$

Misalkan tinggi segitiga $ADC = t_1$, Sehingga:

$$\frac{\text{Luas } \Delta\text{ACL}}{\text{Luas } \Delta\text{DCL}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AL \cdot t_1}{\frac{1}{2} \cdot LD \cdot t_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot t_1}{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot t_1} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Luas } \Delta ACL = \frac{1}{4} \times \text{Luas } \Delta DCL \qquad \text{... (1)}$$

Perhatikan segitiga BCL. $BD : DC = 1 : 3$

Misalkan tinggi segitiga $BCL = t_2$, Sehingga:

$$\frac{\text{Luas } \Delta\text{DCL}}{\text{Luas } \Delta\text{BDL}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot DC \cdot t_2}{\frac{1}{2} \cdot BD \cdot t_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot t_2}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot t_2} = \frac{3}{1}$$

$$\text{Luas } \Delta DCL = 3 \times \text{Luas } \Delta BDL \qquad \text{... (2)}$$

Substitusikan (2) ke (1)

$$\text{Luas } \Delta ACL = \frac{1}{4} \times \text{Luas } \Delta DCL = \frac{1}{4} \times (3 \times \text{Luas } \Delta BDL = \frac{3}{4} \times \text{Luas } \Delta BDL)$$

$$\frac{\text{Luas } \Delta\text{ACL}}{\text{Luas } \Delta\text{BDL}} = \frac{3}{4}$$

Jadi, perbandingan luas ΔACL dan ΔBDL adalah 3 : 4.

9. Suatu *string* terdiri dari 10 angka 0, 1, atau 2. Bobot *string* didefinisikan sebagai jumlah angka-angka dalam *string* tersebut. Sebagai contoh, *string* 0002002001 mempunyai bobot 5. Banyak *string* dengan bobot 4 adalah ...

   Jawab:

   Yang dimasud dengan *string* dalam matematika atau bahasa pemrograman komputer adalah suatu penulisan dengan menggunakan gabungan huruf, angka, atau simbol-simbol karakter lain dan bersifat sebagai teks biasa. Contoh nomor peserta 001 sebagai teks, bukan bilangan.

   String dengan bobot 4:

1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Banyak *string* dengan pola seperti ini adalah $\frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$

1	2	1	0	0	0	0	0	0	0

Banyak *string* dengan pola seperti ini adalah $\frac{10!}{1! \cdot 2! \cdot 7!} = 360$

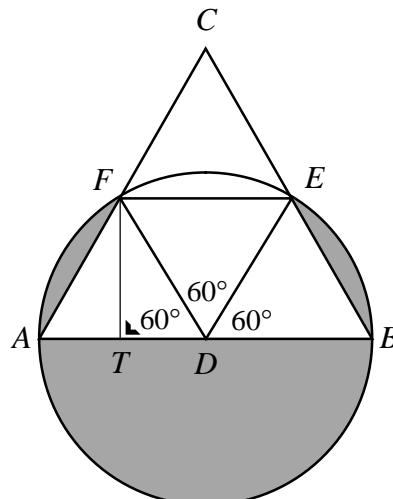
2	2	0	0	0	0	0	0	0	0

Banyak *string* dengan pola seperti ini adalah $\frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$

Jadi, banyak *string* dengan bobot 4 adalah 210 + 360 + 45 = 615

10. Tita memiliki tetangga baru yang memiliki 2 anak. Jika salah satu anak tetangga baru tersebut adalah perempuan, maka besar peluang anak yang lain adalah laki-laki adalah ...

Jawab:

Misal L adalah Laki-laki; dan P adalah Perempuan

	L	P
L	L, L	L, P
P	P, L	P, P

Karena salah satu anak sudah dipastikan adalah perempuan, maka ruang sampelnya menjadi: $S = \{(L,P), (P,L),(P,P)\} \rightarrow n(S) = 3$

Jadi, besar peluang anak yang lain laki-laki adalah $\frac{2}{3}$.

SELEKSI TINGKAT PROVINSI (BAGIAN A: SOAL ISIAN SINGKAT)

1. Diketahui segitiga sama sisi dengan panjang sisi 10 cm. Jika dibuat lingkaran yang berpusat di titik tengah salah satu sisi segitiga dengan jari-jari 5 cm, maka luas daerah di dalam lingkaran dan di luar segitiga adalah ... cm^2.

Jawab:

Diketahui:

$AB = BC = AC = 10$ cm

Jari-jari lingkaran = $AD = BD = BE = CE = CF = AF = EF = 5$ cm

$AT = \frac{5}{2}$ cm

Dapat dilihat bahwa segitiga *ABC* bisa dibagi menjadi empat segitiga kecil yang sama.

Perhatikan segitiga kecil *ADF*:

$$t_{segitiga\ kecil} = \sqrt{AF^2 - AT^2}$$

$$= \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{25 - \frac{25}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{100}{4} - \frac{25}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{75}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{3 \cdot 25}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

$$L_{\text{arsiran}} = 2 \cdot L_{\text{tembereng}} + L_{\text{setengah lingkaran}}$$

$$= 2 \cdot (L_{\text{juring DEF}} + L_{\text{segitiga kecil}}) + \left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2\right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{60}{360} \cdot \pi \cdot r^2 - \frac{1}{2} \cdot EF \cdot t_{segitiga\ kecil}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2\right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 5^2 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{25}{2} \cdot \pi\right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{25}{6} \cdot \pi - \frac{25}{4}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{25}{2} \cdot \pi\right)$$

$$= \frac{25\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2} + \frac{25}{2}\pi$$

$$= \frac{125\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{25}{3} \cdot \left(\frac{5}{2}\pi - \sqrt{3}\right)$$

Jadi, luas daerah di dalam lingkaran dan di luar segitiga adalah $\frac{25}{3} \cdot \left(\frac{5}{2}\pi - \sqrt{3}\right) \text{cm}^2$.

2. Rata-rata dari 25 siswa adalah 40. Jika selisih rata-rata nilai 5 siswa terendah dan 20 siswa sisanya adalah 25, maka rata-rata nilai 5 siswa terendah adalah ...

   Jawab:

   Misal:

   $\bar{x}_a$ = rata-rata nilai 5 siswa terendah

n_a = banyaknya siswa pada $\overline{x}_a$

n_b = rata-rata nilai 20 siswa lainnya

$\overline{x}_b$ = banyanya siswa pada $\overline{x}_b$

Diketahui:

$n = 25$

$\overline{x}_{gabungan} = 40$

$n_a = 5$ dan $n_b = 20$

$\overline{x}_b - \overline{x}_a = 25 \quad \rightarrow \quad \overline{x}_b = 25 + \overline{x}_a$

$$\overline{x}_{gabungan} = \frac{n_a \cdot \overline{x_a} + n_b \cdot \overline{x_b}}{n_a + n_b}$$

$$40 = \frac{5 \cdot \overline{x_a} + 20 \cdot \left(25 + \overline{x_a}\right)}{5 + 20}$$

$$40 = \frac{5\overline{x_a} + 20 \cdot \left(25 + \overline{x_a}\right)}{25}$$

$$40 = \frac{5\overline{x_a} + 500 + 200\overline{x_a}}{25}$$

$$40 \cdot 25 = 25\overline{x}_a + 500$$

$$1000 = 25\overline{x}_a + 500$$

$$25\overline{x}_a = 1000 - 500$$

$$\overline{x}_a = \frac{500}{25} = 20$$

Jadi, rata-rata nilai 5 siswa terendah adalah adalah 20.

3. Dalam sebuah kotak terdapat beberapa bola dengan empat macam warna yakni: biru, merah, kuning, dan putih. Paling sedikit terdapat 10 bola untuk masing-masing warna. Bola diambil satu demi satu dari dalam kotak tersebut

secara acak tanpa pengembalian. Banyak pengambilan yang harus dilakukan untuk memastikan mendapatkan 6 bola dengan warna sama adalah ...

Jawab:

Diketahui:

4 bola: biru, merah, kuning, putih $\rightarrow$ paling sedikit terdapat 10 bola sewarna

Dengan menggunakan *Pigeon Hole Principle* (Prinsip Sangkar Burung), bisa diperoleh pernyataan:

Jika diambil 21 bola dengan 4 warna yang berbeda, maka paling tidak terdapat 6 bola yang sewarna.

Jadi, banyak pengambilan yang harus dilakukan untuk memastikan mendapatkan 6 bola dengan warna sama adalah 21.

4. Jika $\frac{x^3+3x^2y}{x+3y}-\frac{27y^3+9xy^2}{3y+x}=x+3y$, maka nilai x = ...

Jawab:

$$\frac{x^3+3x^2y}{x+3y}-\frac{27y^3+9xy^2}{3y+x}=x+3y$$

$$\frac{x^2(x+3xy)}{x+3xy}-\frac{9y^2(3y+x)}{3y+x} = x + 3y$$

$$x^2 - 9y^2 = x + 3y$$

$$(x - 3y) \cdot (x + 3y) = x + 3y$$

$$x - 3y = \frac{x+3y}{x+3y}$$

$$x - 3y = 1$$

$$x = 1 + 3y$$

Jadi, nilai $x = 1 + 3y$.

5. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan di bawah adalah ...

$$\frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1} \geq 1$$

Jawab:

Pertidaksamaan $\frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1} \geq 1$ harus memenuhi:

Syarat I:

$x^2 - 1 \neq 0$

$(x + 1)\cdot(x - 1) \neq 0$

$x \neq -1$ atau $x \neq 1$

Syarat II:

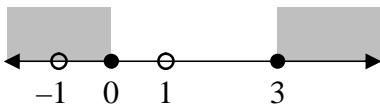
$$\frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1} \geq 1$$

$$\frac{(x+1)\cdot(x^3 - 3x^2 + x - 1)}{(x+1)\cdot(x-1)} \geq 1$$

$$\frac{(x^3 - 3x^2 + x - 1)}{(x-1)} \geq 1$$

$x^3 - 3x^2 + x - 1 \geq x - 1$

$x^3 - 3x^2 + x - 1 - x + 1 \geq 0$

$x^3 - 3x^2 \geq 0$

$x^2 \cdot (x - 3) \geq 0$

$x = 0$ atau $x = 3$

Hp = $\{x | x \leq 0 \text{ atau } x \geq 3\}$

Pertidaksamaan $\dfrac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1} \geq 1$ harus memenuhi syarat I dan syarat II, sehingga:

Jadi, himpunan penyelesaian pertidaksamaannya adalah $\{x|x \leq 0$ atau $x \geq 3$ dan $x \neq -1\}$

6. Jika nilai $100B = 100^2 + 99^2 - 98^2 - 97^2 + 96^2 + 95^2 - 94^2 - 93^2 + \ldots + 4^2 + 3^2 - 2^2 - 1^2$, maka nilai B adalah ...

Jawab:

$100B = 100^2 + 99^2 - 98^2 - 97^2 + 96^2 + 95^2 - 94^2 - 93^2 + \ldots + 4^2 + 3^2 - 2^2 - 1^2$

$100B = (100^2 - 98^2) + (99^2 - 97^2) + (96^2 - 94^2) + (95^2 - 93^2) + \ldots + (4^2 - 2^2) + (3^2 - 1^2)$

$100B = (100 - 98)\cdot(100 + 98) + (99 - 97)\cdot(99 + 97) + (96 - 94)\cdot(96 + 94) + (95 - 93)\cdot(95 + 93) + \ldots + (4 - 2)\cdot(4 + 2) + (3 - 1)\cdot(3 + 1)$

$100B = 2 \cdot 198 + 2 \cdot 196 + 2 \cdot 190 + 2 \cdot 188 + \ldots + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 4$

$100B = 2 \cdot (198 + 196 + 190 + 188 + \ldots + 6 + 4)$

$\dfrac{100B}{2} = (198 + 196 + 190 + 188 + \ldots + 6 + 4)$

$50B = 198 + 196 + 190 + 188 + \ldots + 6 + 4 \quad \rightarrow \quad$ 50 suku

Selanjutnya gunakan trik gauss:

$$\begin{array}{rl} 50B & = 198 + 196 + 190 + 188 + \ldots + 6 + 4 \\ 50B & = 4 + 6 + 12 + 14 + \ldots + 196 + 198 \quad + \\ \hline 100B & = 202 + 202 + 202 + 202 + \ldots + 202 + 202 \end{array}$$

dibalik urutannya

$100B = 50 \cdot 202$

$B = \dfrac{50 \cdot 202}{100} = 101$

Jadi, nilai B adalah 101.

7. Sebuah drum berbentuk tabung yang berjari-jari 70 cm dan berisi air setinggi 40 cm (gunakan $\pi = \frac{22}{7}$). Seorang tukang pasang ubin memasukkan 110 buah ubin keramik ke dalam drum sehingga tinggi permukaan air bertambah 8 cm. Jika permukaan setiap ubin keramik berukuran 40 cm x 40 cm, berapakah tebal ubin keramik tersebut?

   Jawab:

   Diketahui:

   r = 70 cm

   $t_{air\ mula\text{-}mula}$ = 40 cm

   $\pi = \frac{22}{7}$

   110 buah ubin $\rightarrow$ ukuran permukaan = 40 cm $\times$ 40 cm

   $t_{air\ tambahan}$ = 8 cm

   V110 ubin = V air tambahan

   $110 \cdot 40 \cdot 40 \cdot t_{ubin} = \pi \cdot r^2 \cdot t_{air\ tambahan}$

   $110 \cdot 40 \cdot 40 \cdot t_{ubin} = \frac{22}{7} \cdot 70^2 \cdot 8$

   $$t_{ubin} = \frac{\frac{22}{7} \cdot 70^2 \cdot 8}{110 \cdot 40 \cdot 40}$$

   t_{ubin} = 0,7 cm

   Jadi, tebal ubin keramik tersebut adalah 0,7 cm.

8. Diketahui n bilangan bulat positif. Jika n ditambahkan angka-angka pembentuknya menghasilkan 313, maka semua nilai n yang mungkin adalah ...

   Jawab:

$n = abc$	$a + b + c$	$abc + a + b + c$
289	19	308
295	16	311
296	17	313
305	8	313
310	4	314

Jadi, semua nilai n yang mungkin adalah 296 dan 305.

9. Diketahui dua buah himpunan A dan B dengan

$A = \{(x, y) | 1987 \le y \le x \le 2013$ dengan x dan y bilangan bulat$\}$ dan

$A = \{(x, y) | y \le 2013 - x$ dengan x dan y bilangan bulat$\}$.

Banyaknya anggota himpunan $A - B$ adalah ...

Jawab:

$A - B = \{(x, y) | (x, y) \in A$ dan $(x, y) \notin A \cap B\}$

Mencari anggota A:

$A = \{(x, y) | 1987 \le y \le x \le 2013$ dengan x dan y bilangan bulat$\}$

$= \{(1987, 1988), \ldots, (1987, 2013)$ → 26 anggota

$(1988, 1989), \ldots, (1988, 2013)$ → 25 anggota

$(1989, 1990), \ldots, (1989, 2013)$ → 24 anggota

$\vdots$

$(1989, 2013)\}$ → 1 anggota

$n(A) = 1 + 2 + 3 + \ldots + 24 + 25 + 26$ → deret aritmatika

$= \frac{26}{2} \cdot (26 + 1)$

$= 13 \times 27 = 351$

Mencari anggota $A \cap B$:

A → $1987 \le y < x \le 2013$

$A = \{(1987, 1988), \ldots, (2012, 2013)\}$

$B \quad \rightarrow \quad y \leq 2013 - x$

$y + x \leq 2013$

untuk x dan y bilangan bulat positif pada B, maka diperoleh:

$B = \{(0, 2013), \ldots, (1006, 1007), \ldots\}$

Sehingga:

$A - B = \{(x, y)|(x, y) \in A \text{ dan } (x, y) \notin A \cap B\}$

$A - B = A$

$n(A - B) = n(A)$

$= 351$

Jadi, anyaknya anggota himpunan $A - B$ adalah 351.

10. Tim sepakbola terdiri atas 25 orang, masing-masing diberi kaos bernomor 1 sampai dengan 25. Banyak cara memilih tiga pemain secara acak dengan syarat jumlah nomor kaos mereka habis dibagi tiga adalah ...

Jawab:

Hal yang perlu diperhatikan dalam pemilihan tiga pemain secara acak adalah:

1. Tidak memperhatikan urutan pemilihan
2. Tiga pemain yang dipilih, jumlah nomor kaosnya harus bisa dibagi tiga {dengan demikian kemungkinan jumlahnya: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75}
3. Karena hanya ada satu kaos dari nomor 1 sampai 25. Jadi tidak bolah ada nomor yang sama.

Jumlah nomor kaos	Banyak penyusunan
3	0
6	1
9	3
12	7
15	12
18	19

21	27
24	37
27	48
30	59
33	66
36	71
39	72
42	71
45	66
48	59
51	48
54	37
57	27
60	19
63	12
66	7
69	3
72	1
75	0
Jumlah	772

Jadi, banyak cara memilih tiga pemain secara acak dengan syarat jumlah nomor kaos mereka habis dibagi tiga adalah 772.

SELEKSI TINGKAT PROVINSI (BAGIAN A: SOAL URAIAN)

(Oleh Mohammad Tohir)

1. Suatu yayasan menyumbangkan 144 buku ke 4 sekolah. Banyak buku yang diterima untuk setiap sekolah tidak sama. Selisih buku yang diterima sekolah A dan B adalah 16. Selisih buku yang diterima sekolah B dan C adalah 12. Selisih buku yang diterima sekolah C dan D adalah 8. Sekolah A menerima buku paling sedikit dibandingkan dengan yang diterima sekolah lain. Jika sekolah D menerima buku 2 kali lebih banyak daripada buku yang diterima sekolah A, tentuka banyak buku yang diterima masing-masing sekolah.

   Jawab:

   Suatu yayasan menyumbang 144 buku

   Sekolah A menerima buku paling sedikit dibandingkan dengan yang diterima sekolah lain, sehingga $B - A = 16$.

   Sekolah D menerima buku 2 kali lebih banyak daripada buku yang diterima sekolah A sehingga $D = 2A$

   Dari uraian di atas terdapat 4 kemungkinan yang terbentuk, yaitu:

   Kemungkinan I:

   $B - A = 16$ … (1)

   $C - B = 12$ … (2)

   $D - C = 8$ … (3)

   Eleminasi (2) dengan (3)

   $C - B = 12$

   $D - C = 8$ +

   $D - B = 20$ … (4)

   Eleminasi (4) dengan (1)

   $D - B = 20$

   $B - A = 16$ +

   $D - A = 36$

Karena $D = 2A$, maka $A = 36$ sehingga $D = 72$, $B = 52$, dan $C = 64$

Karena $A + B + C + D = 224$ dan $224 > 144$, maka kemungkinan ini tidak memenuhi

Kemungkinan II:

$B - A = 16$ … (1)

$B - C = 12$ … (2)

$C - D = 8$ … (3)

Eleminasi (2) dengan (3)

$$\begin{array}{l} B - C = 12 \\ \underline{C - D = 8} \quad + \\ B - D = 20 \quad \ldots (4) \end{array}$$

Eleminasi (4) dengan (1)

$$\begin{array}{l} B - D = 20 \\ \underline{B - A = 16} \quad - \\ A - D = 4 \end{array}$$

Karena $D = 2A$, maka $A = -4$, hal ini tidak mungkin terjadi sehingga tidak memenuhi

Kemungkinan III:

$B - A = 16$ … (1)

$B - C = 12$ … (2)

$D - C = 8$ … (3)

Eleminasi (2) dengan (3)

$$\begin{array}{l} B - C = 12 \\ \underline{D - C = 8} \quad - \\ B - D = 4 \quad \ldots (4) \end{array}$$

Eleminasi (4) dengan (1)

$B - D = 4$

$B - A = 16$ +

$A - D = -12$

Karena $D = 2A$, maka $A = 12$ sehingga $D = 24$, $B = 28$, dan $C = 16$

Karena $A + B + C + D = 80$ dan $80 > 144$, maka kemungkinan ini tidak memenuhi

Kemungkinan IV:

$B - A = 16$ … (1)

$C - B = 12$ … (2)

$C - D = 8$ … (3)

Eleminasi (2) dengan (3)

$C - B = 12$

$C - D = 8$ –

$D - B = 4$ … (4)

Eleminasi (4) dengan (1)

$D - B = 4$

$B - A = 16$ +

$D - A = 20$

Karena $D = 2A$, maka $A = 20$ sehingga $D = 40$, $B = 36$, dan $C = 48$

Karena $A + B + C + D = 144$, maka kemungkinan ini memenuhi

Jadi, banyak buku yang diterima masing-masing sekolah adalah

Sekolah A = 20 buku

Sekolah B = 36 buku

Sekolah C = 48 buku

Sekolah D = 40 buku

2. Satu set kartu remi/bridge terdiri dari 52 lembar. Diambil 5 lembar kartu secara acak. Tentukan peluang terambil 2 kartu warna merah dan 3 kartu warna hitam, yang diantaranya terdapat tepat 1 kartu king.

Jawab:

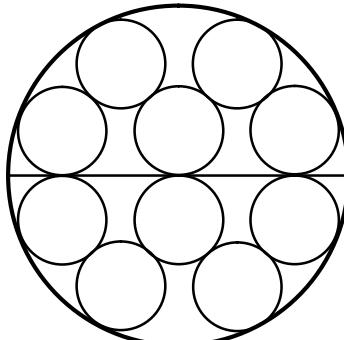
Banyak ruang sampel = ${}_{52}C_5 = 2598960$

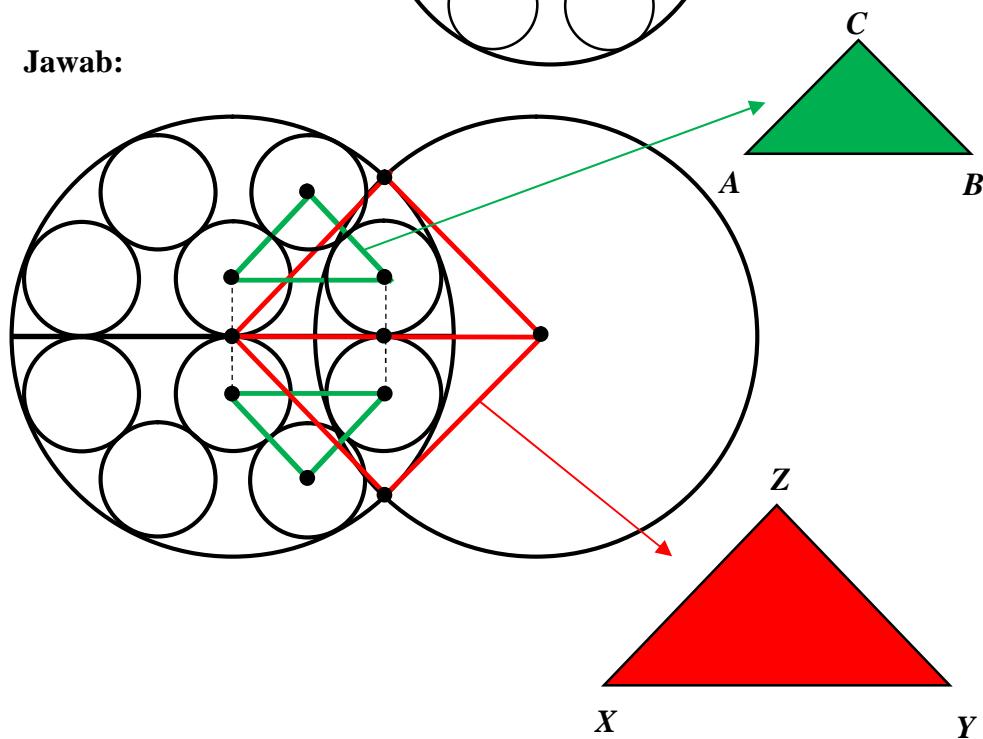
(K♥, 1♥)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$	(K♥, 1♦)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$
(K♥, 2♥)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$	(K♥, 2♦)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$
(K♥, 3♥)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$	(K♥, 3♦)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$
(K♥, 4♥)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$	(K♥, 4♦)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$
(K♥, 5♥)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$	(K♥, 5♦)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$
(K♥, 6♥)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$	(K♥, 6♦)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$
(K♥, 7♥)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$	(K♥, 7♦)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$
(K♥, 8♥)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$	(K♥, 8♦)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$
(K♥, 9♥)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$	(K♥, 9♦)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$
(K♥, 10♥)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$	(K♥, 10♦)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$
(K♥, J♥)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$	(K♥, J♦)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$
(K♥, Q♥)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$	(K♥, Q♦)	3 hitam	${}_{26}C_3 = 2600$

Banyaknya kemungkinan untuk 2 kartu warna merah = ${}_{24}C_2 = 276$

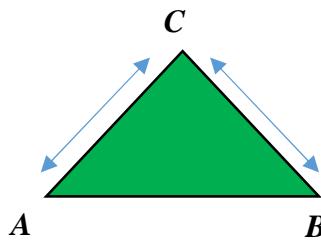
Banyaknya kemungkinan untuk 2 kartu warna merah = ${}_{26}C_3 = 2600$

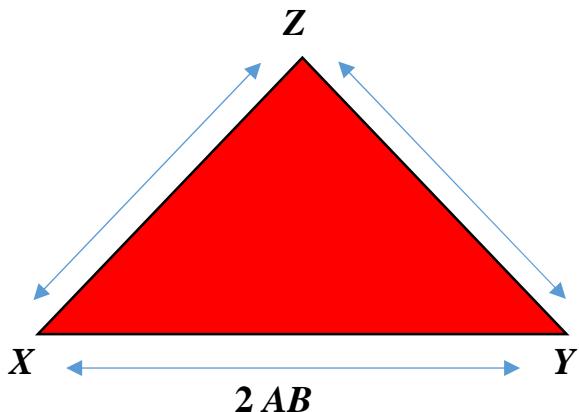
Banyaknya kemungkinan untuk 2 kartu warna merah = ${}_{2}C_1 = 2$

Sehingga jumlah kemungkinannya adalah:

$${}_{24}C_2 \times {}_{26}C_3 \times {}_{2}C_1 = 276 \times 2600 \times 2 = 1435200$$

Peluang terambil 2 kartu warna merah dan 3 kartu warna hitam, yang diantaranya terdapat tepat 1 kartu king:

$$\frac{{}_{24}C_2 \cdot {}_{26}C_3 \cdot {}_{2}C_1}{{}_{52}C_5} = \frac{1435200}{2598960} = \frac{3120 \cdot 460}{3120 \cdot 833} = \frac{460}{833}$$

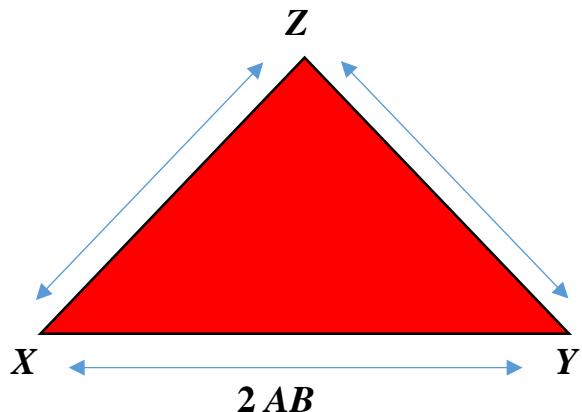
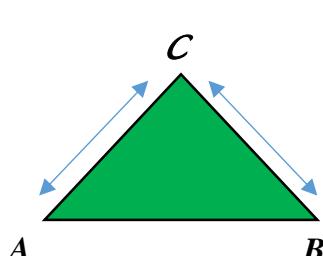
Jadi, peluang terambil 2 kartu warna merah dan 3 kartu warna hitam, yang diantaranya terdapat tepat 1 kartu king adalah $\frac{460}{833}$.

3. Misalkan 10 lingkaran yang berjari-jari 1 cm dimasukkan dalam lingkaran berjari-jari R cm seperti pada gambar berikut. Tentukan R.

Jawab:

Perhatikan bahwa ΔABC dan ΔXYZ merupakan segitiga siku-siku samakaki dan ΔABC sebangun dengan ΔXYZ.

Karena ΔABC adalah segitiga siku-siku. Maka dengan teorema pythagoras diperoleh:

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{4+4}$$
$$= \sqrt{4 \times 2}$$
$$= 2\sqrt{2}$$

Karena ΔXYZ adalah segitiga siku-siku. Maka dengan teorema pythagoras diperoleh:

$$XY^2 = YZ^2 + XZ^2$$
$$\left(4\sqrt{2}\right)^2 = K^2 + K^2$$
$$32 = 2K^2$$
$$16 = K^2$$
$$K = \sqrt{16}$$
$$K = 4$$

$K = XZ = YZ = 4$ cm

Perhatikan bahwa XZ adalah jari-jari lingkaran besar (R), sehingga:

Panjang jari-jari lingkaran besar (R) adalah 4 cm.

Alternatif penyelesaian:

Dengan menggunakan rumus kesebangunan, diperoleh:

$$\frac{AC}{XZ} = \frac{AB}{XY}$$

$$\frac{2}{XZ} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$$

$$XY = \frac{2 \cdot 4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad XY = 4$$

Jadi, panjang jari-jari lingkaran besar (R) = XZ adalah 4 cm.

4. Gunakan depapan bilangan prima yang berbeda dan kurang dari 25 untuk melengkapi persegi ajaib di bawah, sehingga setiap kotak di dalam persegi terisi oleh satu bilangan prima serta jumlah bilangan pada setiap baris dan setiap kolom selalu sama.

		47	53
	37	41	
29	61		
59			31

Jawab:

Misalkan kedelapan bilangan prima yang kurang dari 25 adalah a, b, c, d, e, f, g, dan h

a	b	47	53
c	37	41	d
29	61	f	e
59	h	g	31

$$a + b + 47 + 53 = a + c + 29 + 59 \quad \rightarrow \quad b - c = -12$$

b	c	$b - c$
11	23	–12

$b + 37 + 61 + h = c + 37 + 41 + d$

$b - c = (d - h) - 20$

$-12 = (d - h) - 20$ maka $d - h = 8$

Karena d dan h bilangan prima, maka yang mungkin untuk nilai d dan h adalah

d	h	$d - h$
13	5	8

$53 + d + e + 31 = 59 + h + g + 31$

$d - h = (g - e) + 6$

$8 = (g - e) + 6$ maka $g - e = 2$

Karena g dan e bilangan prima, maka yang mungkin untuk nilai g dan e adalah

g	e	$g - e$
19	17	2

$a + b + 47 + 53 = b + 37 + 61 + h$

$a - h = -2$

karena $h = 5$ maka nilai $a = 3$

$29 + 61 + f + 17 = b + 37 + 61 + h$

Karena nilai $b = 11$ dan $h = 5$ maka nilai $f = 7$

Jadi, kelengkapan tabelnya adalah

3	11	47	53
23	37	41	13
29	61	7	17
59	5	19	31

5. Didefinisikan $[\![x]\!]$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan *x*. Sebagai contoh $\left[\!\left[\frac{5}{2}\right]\!\right]=2$ karena $2\le\frac{5}{2}<3$. Jika *x* dan *y* adalah bilangan real dengan $[\![\sqrt{x}]\!]=10$ dan $[\![\frac{1}{4}\sqrt{y}]\!]=8$, tentukan nilai dari $\left[\!\left[\sqrt{[\![\sqrt{x+y}]\!]}\right]\!\right]$.

Jawab:

Jika $[\![\sqrt{x}]\!]=10$, maka nilai *x* yang mungkin memenuhi: $100\le x\le 121$

Jika $[\![\frac{1}{4}\sqrt{y}]\!]=8$, maka nilai *y* yang mungkin memenuhi: $1024\le y\le 1296$

Untuk nilai kemungkinan terkecil, kita ambil *x* = 100 dan *y* = 1024. Maka nilai dari:

$$\left[\!\left[\sqrt{[\![\sqrt{x+y}]\!]}\right]\!\right] = \left[\!\left[\sqrt{[\![\sqrt{100+1024}]\!]}\right]\!\right] = \left[\!\left[\sqrt{[\![\sqrt{1124}]\!]}\right]\!\right]$$

$$= \left[\!\left[\sqrt{[\![33,5261]\!]}\right]\!\right] = [\![\sqrt{33}]\!]$$

$$= [\![5,74456]\!] = 5$$

Untuk kemungkinan terbesar, kita ambil *x* = 121 dan *y* = 1296. Maka nilai dari:

$$\left[\!\left[\sqrt{[\![\sqrt{x+y}]\!]}\right]\!\right] = \left[\!\left[\sqrt{[\![\sqrt{121+1296}]\!]}\right]\!\right] = \left[\!\left[\sqrt{[\![\sqrt{1417}]\!]}\right]\!\right]$$

$$= \left[\!\left[\sqrt{[\![37,643]\!]}\right]\!\right] = [\![\sqrt{37}]\!]$$

$$= [\![6,08276]\!] = 6$$

Jadi, nilai dari $\left[\!\left[\sqrt{[\![\sqrt{x+y}]\!]}\right]\!\right]$ = 5.

A. SOAL HARI PERTAMA (SELEKSI TINGKAT NASIONAL)

(oleh Tutur Widodo)

1. Diketahui f adalah suatu fungsi sehingga $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$ untuk setiap $x \neq 0$. Carilah nilai x yang memenuhi $f(x) = f(-x)$

Jawab:

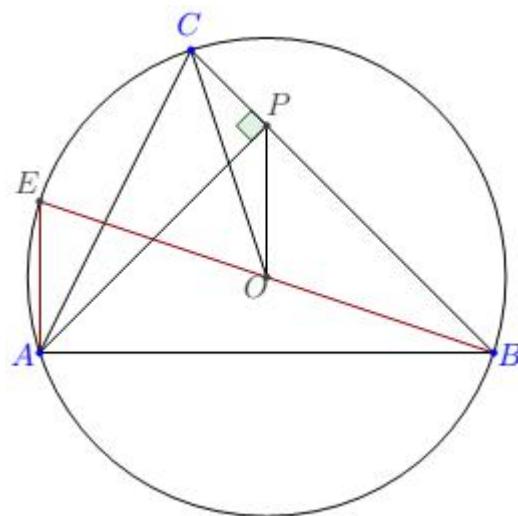
Untuk sebarang bilangan real $y \neq 0$, substitusikan nilai $x = y$ dan $x = \frac{1}{y}$ sehingga berturut-turut diperoleh

$$f(y)+2f\left(\frac{1}{y}\right)=3y \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right)+2f(y)=\frac{3}{y} \qquad \ldots\ldots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

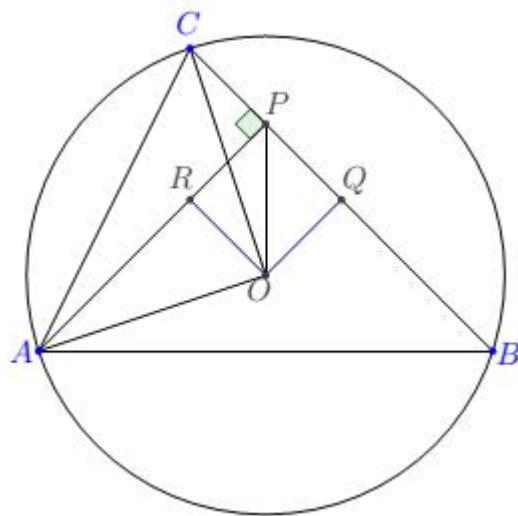
$$3f(y)=\frac{6}{y}-3y \quad \Leftrightarrow \quad f(y)=\frac{2}{y}-y$$

Dari sini diperoleh

$$f(x) = f(-x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{x}-x=-\frac{2}{x}+x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{x}=2x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 2 \;\rightarrow (x = -\sqrt{2} \text{ atau } x = \sqrt{2}\,)$$

Jadi, nilai x yang memenuhi $f(x) = f(-x)$ adalah $x = -\sqrt{2}$ atau $x = \sqrt{2}$.

2. Diketahui ABC adalah segitiga lancip dengan titik-titik sudutnya terletak pada lingkaran yang berpusat di titik O. Titik P terletak pada sisi BC sehingga AP adalah garis tinggi segitiga ABC. Jika $\angle ABC + 30° \leq \angle ACB$, buktikan bahwa $\angle COP + \angle CAB < 90°$.

Jawab:

Perpanjang garis BO sehingga memotong lingkaran di titik E (seperti terlihat pada gambar). Perhatikan bahwa BE adalah diameter lingkaran luar ΔABC. Hal ini berakibat $\angle BAE = 90°$.

Oleh karena itu, untuk membuktikan $\angle COP + \angle CAB < 90°$ cukup bahwa $\angle COP < \angle CAE$. Akan tetapi $\angle CAE = \angle CBE = \angle OCP$. Sehingga cukup ditunjukkan $\angle COP < \angle OCP$. Atau setara dengan menunjukkan $CP < OP$.

Untuk menunjukkan $CP < OP$ tambahkan beberapa titik bantu yaitu titik Q pada sisi BC sehingga $OQ \perp BC$ dan titik R pada ruas garis AP sehingga $OR \perp AP$ (sperti pada gambar di bawah ini). Diperoleh $OQPR$ berupa persegipanjang dengan $PQ = QR$ dan $PR = OQ$.

Perhatikan bahwa

$$\angle CAO = \angle ACO = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} = \frac{180^\circ - 2\angle ABC}{2} = 90^\circ$$

Selain itu

$$\angle CAP = 90^\circ - \angle ACB$$

Dari kedua hasil di atas diperoleh

$\angle PAO = \angle CAO - \angle CAP = (90 - \angle ABC) - (90^\circ - \angle ABC) = \angle ACB - \angle ABC$

Dan karena $\angle ABC + 30^\circ \leq \angle ACB$ berakibat $\angle PAO \geq 30^\circ$.

Sehingga diperoleh

$$OR = OA \cdot \sin \angle PAO \geq \frac{OA}{2}.$$

Ingat kembali bahwa $PQ = OR$ sehingga

$$PQ \geq \frac{OA}{2} = \frac{OC}{2}$$

Dengan menggabungkan fakta bahwa $CQ < OC$, $CQ = CP + PQ$ dan $PQ \geq \frac{OC}{2}$ dapat disimpulkan $CP < PQ$.

Sehingga diperoleh

$$CP < PQ < OP$$

Seperti apa yang diharapkan.

Jadi, terbukti $\angle COP + \angle CAB < 90^\circ$.

3. Tentukan semua bilangan asli a, b, dan c yang lebih besar dari 1 dan berbeda, serta memenuhi sifat bahwa abc membagi habis $bc + ac + ab + 2$.

Jawab:

Tanpa mengurangi keumumam misalkan $1 < a < b < c$. karena abc membagi habis $ab + bc + ca + 2$ itu berarti terdapat bilangan asli k sedemikian sehingga

$$ab + bc + ca + 2 = k \cdot abc \qquad \ldots\ldots (1)$$

dari persamaan (1) diperoleh

$$k = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{2}{abc}$$

mengingat $1 < a < b < c$ diperoleh

$$k \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{14}{12} < 2$$

sehingga nilai k yang mungkin hanya $k = 1$. Selain itu jika $a \geq 3$ diperoleh

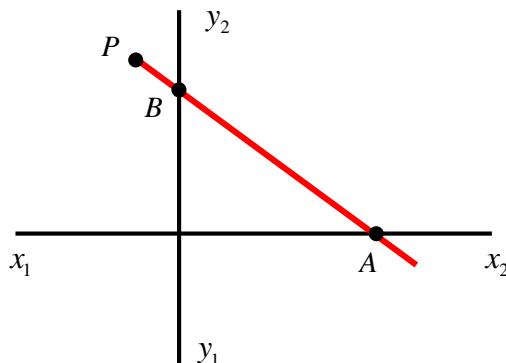
$$k \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{49}{60} < 1$$

Yang jelas tak mungkin karena k bilangan asli. Jadi, diperoleh $a = 2$.

Dengan mengsubstitusikan nilai $k = 1$ dan $a = 2$ pada persamaan (1) diperoleh

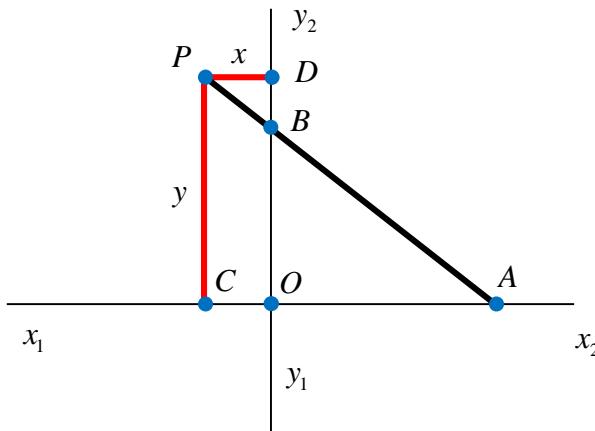
$$2b + bc + 2c + 2 = 2bc$$

Yang setara dengan

$$(b - 2)(c - 2) = 6$$

Oleh karena itu, ada dua kasus yang mungkin yaitu

i. $b - 2 = 1$ dan $c - 2 = 6$ sehingga diperoleh $b = 3$ dan $c = 8$.

ii. $b - 2 = 1$ dan $c - 2 = 6$ sehingga diperoleh $b = 3$ dan $c = 8$.

Mudah dicek bahwa $a = 2$, $b = 3$, $c = 8$ dan $a = 2$, $b = 4$, $c = 5$ memenuhi kondisi dari soal.

Jadi, solusi yang memenuhi adalah $a = 2$, $b = 3$, $c = 8$ dan $a = 2$, $b = 4$, $c = 5$ serta semua permutasinya (total ada 12 solusi untuk triple (a, b, c) yang mungkin).

4. Misalkan A, B, dan P adalah paku-paku yang ditanam pada papan ABP. Panjang $AP = a$ satuan dan $BP = b$ satuan. Papan ABP diletakkan pada lintasan x_1x_2 dan y_1y_2 sehingga A hanya bergerak bebas sepanjang x_1x_2 lintasan dan hanya bergerak bebas sepanjang lintasan y_1y_2 seperti pada gambar berikut. Misalkan x adalah jarak titik P terhadap lintasan y_1y_2 dan y adalah terhadap lintasan x_1x_2. Tunjukkan bahwa persamaan lintasan titik P adalah $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Jawab:

Untuk menyelesaikan soal ini, harus dicari hubungan antara variable-variable *a*, *b*, *x* dan *y*. Karena berbicara mengenai geometri maka salah satu alat yang dapat digunakan tentu saja adalah kesebangunan. Untuk itu perhatikan gambar di bawah ini (gambar seperti pada soal setelah ditambah beberapa titik untuk memudahkan komputasi).

Perhatikan bahwa ΔAOB sebangun dengan ΔBDP sehingga diperoleh

$$\frac{OA}{AB}=\frac{PD}{PB} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{OA}{a-b}=\frac{x}{b}$$

Sehingga $OA=\dfrac{x(a-b)}{b}$

Selanjutnya diperoleh (dengan bantuan Pythagoras tentunya)

$$OD = OB + BD \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{(a-b)^2 - \frac{x^2(a-b)^2}{b^2}} + \sqrt{b^2 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \left(\frac{a-b}{b}\right)\sqrt{b^2-x^2} + \sqrt{b^2-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2y^2 = a^2(b^2 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Sampai di sini kita telah membuktikan apa yang diminta soal. Pekerjaan selesai. Namun cara di atas terasa panjang dan membosankan karena banyak sekali notasi akar. Sekarang perhatikan ΔACP dan ΔBDP. Kedua segitiga tersebut ternyata sebangun. Karenanya diperoleh

$$\frac{CP}{AP} = \frac{BD}{BP} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{a} = \frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{a^2} = \frac{b^2-x^2}{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2y^2 = a^2(b^2 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Terlihat lebih simpel ternyata.

Jadi, terbukti lintasan titik P berupa ellips dengan persamaan $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

5. Terdapat tiga buah kotak A, B, dan C masingmasing berisi 3 bola berwarna putih dan 2 bola berwarna merah. Selanjutnya dilakukan pengambilan tiga bola dengan aturan sebagai berikut:

1. Tahap ke- 1

Ambil satu bola dari kotak A

2. Tahap ke- 2

- Jika bola yang terambil dari kotak A pada tahap ke- 1 berwarna putih, maka bola tersebut dimasukkan ke kotak B. selanjutnya dari kotak B diambil satu bola, jika yang terambil adalah bola berwarna putih, maka bola tersebut dimasukkan ke kotak C, sedangkan jika yang terambil bola merah, maka bola tersebut dimasukkan ke kotak A.
- Jika bola yang terambil dari kotak A pada tahap ke- 1 berwarna merah, maka bola tersebut dimasukkan ke kotak C. selanjutnya dari kotak C diambil satu bola. Jika yang terambil adalah bola berwarna putih maka bola tersebut dimasukkan ke kotak A, sedangkan jika yang termbil bola merah, maka bola tersebut dimasukkan ke kotak B.

3. Tahap ke- 3

Ambil masing-masing satu bola dari kotak A, B, dan C.

Berapa peluang bahwa semua bola yang terambil pada tahap ke- 3 berwarna merah?

Jawab:

Berdasarkan tahap-tahap yang diberikan pada soal maka bagi menjadi 4 kasus, sebagai berikut:

a. Tahap ke- 1 terambil bola berwarna putih dari kotak A dan Tahap ke- 2 terambil bola berwarna putih dari kotak B.

   Peluang terambil bola putih dari kotak A pada Tahap ke- 1 adalah $\frac{3}{5}$. Selanjutnya kotak B berisi 4 bola putih dan 2 bola merah, sehingga peluang terambil bola berwarna putih pada Tahap ke- 2 adalah $\frac{4}{6}$. Pada Tahap ke- 3, kotak A berisi 2 bola putih dan 2 bola merah, kotak B berisi 3 bola putih dan 2 bola merah, kotak C berisi 4 bola putih dan 2 bola merah. Sehingga peluang terambil ketiga bola berwarna merah pada Tahap ke- 3 adalah $\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{6}$.

   Jadi, peluang terambil ketiga bola berwarna merah pada kasus ini adalah

$$\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{75}$$

b. Tahap ke- 1 terambil bola berwarna putih dari kotak A dan Tahap ke- 2 terambil bola berwarna merah dari kotak B.

Peluang terambil bola putih dari kotak A pada Tahap ke- 1 adalah $\frac{3}{5}$. Selanjutnya kotak B berisi 4 bola putih dan 2 bola merah, sehingga peluang terambil bola berwarna putih pada Tahap ke- 2 adalah $\frac{2}{6}$. Pada Tahap ke- 3, kotak A berisi 2 bola putih dan 3 bola merah, kotak B berisi 4 bola putih dan 1 bola merah, kotak C berisi 3 bola putih dan 2 bola merah. Sehingga peluang terambil ketiga bola berwarna merah pada Tahap ke- 3 adalah $\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}$.

Jadi, peluang terambil ketiga bola berwarna merah pada kasus ini adalah

$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{625}$$

c. Tahap ke- 1 terambil bola berwarna merah dari kotak A dan Tahap ke-2 terambil bola berwarna putih dari kotak C.

Peluang terambil bola putih dari kotak A pada Tahap ke- 1 adalah $\frac{2}{5}$. Selanjutnya kotak C berisi 3 bola putih dan 3 bola merah, sehingga peluang terambil bola berwarna putih pada Tahap ke- 2 adalah $\frac{3}{6}$. Pada Tahap ke- 3, kotak A berisi 4 bola putih dan 1 bola merah, kotak B berisi 3 bola putih dan 2 bola merah, kotak C berisi 2 bola putih dan 3 bola merah. Sehingga peluang terambil ketiga bola berwarna merah pada Tahap ke- 3 adalah $\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}$.

Jadi, peluang terambil ketiga bola berwarna merah pada kasus ini adalah

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{625}$$

d. Tahap ke- 1 terambil bola berwarna merah dari kotak A dan Tahap ke-2 terambil bola berwarna merah dari kotak C.

Peluang terambil bola putih dari kotak A pada Tahap ke- 1 adalah $\frac{2}{5}$. Selanjutnya kotak C berisi 3 bola putih dan 3 bola merah, sehingga peluang terambil bola berwarna putih pada Tahap ke- 2 adalah $\frac{3}{6}$. Pada Tahap ke- 3, kotak A berisi 3 bola putih dan 1 bola merah, kotak B berisi 3 bola putih dan 3 bola merah, kotak C berisi 3 bola putih dan 2 bola merah. Sehingga peluang terambil ketiga bola berwarna merah pada Tahap ke- 3 adalah $\frac{1}{4}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}$.

Jadi, peluang terambil ketiga bola berwarna merah pada kasus ini adalah

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{100}$$

Dari keempat kasus di atas maka total peluang terambil 3 bola berwarna merah pada Tahap ke- 3 yaitu $\frac{2}{75}+\frac{6}{625}+\frac{6}{625}+\frac{1}{100}=\frac{419}{7500}$.

B. SOAL HARI KEDUA (SELEKSI TINGKAT NASIONAL)

(oleh Tutur Widodo)

1. Apakah ada bilangan asli n sehingga $n^2 + 5n + 1$ habis dibagi oleh 49? Jelaskan!

Jawab:

Kita buktikan dengan kontradiksi. Andaikan terdapat bilangan asli n sehingga $49|n^2 + 5n + 1$. Karena $49|n^2 + 5n + 1$ maka berakibat $7|n^2 + 5n + 1 = (n - 1)(n + 6) + 7$ sehingga $7|(n - 1)$ atau $7|(n + 6)$. Akan tetapi $7|(n + 6) - (n - 1) = 7$. Dengan kata lain, $7|(n - 1)$ dan $7|(n + 6)$. Oleh karena itu, diperoleh $49|(n - 1)(n + 6)$. Dan karena $49|(n - 1)(n + 6) + 7$ maka diperoleh $49|7$ yang jelas tidak mungkin. Jadi, terbukti tidak ada bilangan asli n sehingga $49|n2 + 5n + 1$.

Selain dengan cara di atas (yang menurut saya harus sedikit kreatif), ada cara lain yang lebih umum dan mudah dilihat.Yaitu dengan bekerja pada modulo 7 dan membagi kasus. Ada 7 kasus untuk pilihan n yang mungkin yaitu

a. $n \equiv 0 \mod 7$.

   Sehingga $n^2 + 5n + 1 \equiv 1 \mod 7$. Jadi, kasus ini tidak memenuhi.

b. $n \equiv 1 \mod 7$.

   Sehingga $n^2 + 5n + 1 \equiv 1 + 5 + 1 \equiv 7 \equiv 0 \mod 7$. Jadi, kasus ini ada kemungkinan memenuhi.

c. $n \equiv 2 \mod 7$.

   Sehingga $n^2 + 5n + 1 \equiv 4 + 10 + 1 \equiv 15 \equiv 1 \mod 7$. Jadi, kasus ini tidak memenuhi.

d. $n \equiv 3 \mod 7$.

   Sehingga $n^2 + 5n + 1 \equiv 9 + 15 + 1 \equiv 25 \equiv 4 \mod 7$. Jadi, kasus ini tidak memenuhi.

e. $n \equiv 4 \mod 7$.

   Sehingga $n^2 + 5n + 1 \equiv 16 + 20 + 1 \equiv 37 \equiv 2 \mod 7$. Jadi, kasus ini tidak memenuhi.

f. $n \equiv 5 \mod 7$.

Sehingga $n^2 + 5n + 1 \equiv 25 + 25 + 1 \equiv 51 \equiv 2 \bmod 7$. Jadi, kasus ini tidak memenuhi.

g. $n \equiv 6 \bmod 7$.

Sehingga $n^2 + 5n + 1 \equiv 36 + 30 + 1 \equiv 67 \equiv 4 \bmod 7$. Jadi, kasus ini tidak memenuhi.

Jadi, satu-satunya bilangan asli n yang mungkin adalah $n \equiv 1 \bmod 7$ atau $n = 7k + 1$ untuk suatu bilangan bulat non-negatif k. Akan tetapi untuk $n = 7k + 1$ diperoleh

$$(7k + 1)^2 + 5(7k + 1) + 1 = 49k^2 + 14k + 1 + 35k + 5 + 1 = 49(k^2 + k) + 7$$

yang jelas tidak habis dibagi oleh 49.

Jadi, dapat disimpulkan tidak ada bilangan asli n sehingga $49|n^2 + 5n + 1$.

2. Diketahui parabola $y = ax^2 + bx + c$ melalui titik $(–3, 4)$ dan $(3, 16)$, serta tidak memotong sumbu- x. Carilah semua nilai absis yang mungkin untuk titik puncat parabola tersebut.
Jawab:

Karena parabola tersebut melalui titik $(−3, 4)$ dan $(3, 16)$ diperoleh

$$9a – 3b + c = 4 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$9a + 3b + c = 16 \quad \ldots\ldots (2)$$

dari persamaan (1) dan (2) di atas diperoleh $6b = 12 \quad \Leftrightarrow \quad b = 2$.

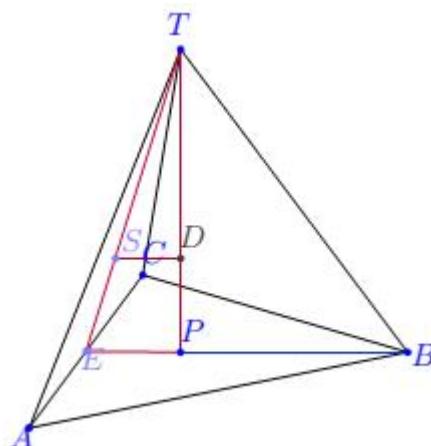
Perhatikan juga bahwa parabola tersebut tidak memotong sumbu-X oleh karena itu diskriminan dari $y = ax^2 + bx + c$ kurang dari nol,

$$b^2 – 4ac < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 – 4ac < 0 \quad \Leftrightarrow \quad ac > 1 \quad \ldots\ldots (3)$$

Selain itu, dari persamaan (1) dan $b = 2$ diperoleh pula $c = 10 – 9a$. Jika nilai $c = 10 – 9a$ disubstitusikan ke pertidaksamaan (3) diperoleh,

$$a(10 – 9a) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 9a^2 – 10a + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (9a – 1)(a – 1) < 0$$

sehingga diperoleh $\frac{1}{9} < a < 1$.

Misalkan absis dari titik puncak parabola tersebut adalah x_p, kita ketahui bahwa $x_p = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2a} = \frac{-1}{a}$ dan karena $\frac{1}{9} < a < 1$ maka diperoleh –9 < x_p < –1.

Jadi, kemungkinan nilai absis yang mungkin untuk titik puncak parabola tersebut adalah –9 < x_p < –1.

3. Diketahui *T.ABC* adalah limas segitiga beraturan dengan panjnag rusuk 2 cm. Titik-titik *P*, *Q*, *R*, dan S berturut-turut merupakan titik berat segitiga *ABC*, segitiga *TAB*, segitiga *TBC*, dan segitiga *TCA*. Tentukan volume limas segitiga *P.QRS*.

   (catatan: titik berat suatu segitiga adalah perpotongan ketiga garis berat)

   Jawab:

   Untuk membuat visualisasi soal ini dalam bentuk tiga dimensi relatif susah. Oleh karena itu, kita ambil titik *P* dan *S* sebagai wakilnya (seperti pada gambar di bawah ini).

   Perhatikan bahwa *TP* dan *DP* berturut-turut adalah tinggi limas segitiga beraturan *T.ABC* dan *P.QRS*. Dan karena bidang *ABC* dan *PQR* sejajar maka *EP*//*SD*. Hal ini berakibat Δ*TEP* sebangun dengan Δ*TSD*. Dan karena $\frac{TS}{SE} = 2$ diperoleh $\frac{TP}{DP} = 3$.

   Selanjutnya, kita hitung terlebih dahulu volume limas segitiga beraturan *T.ABC*. Perhatikan kembali gambar di atas. Segitiga *ABC* adalah segitiga samasisi sehingga *BE* adalah garis berat dan sekaligus garis tinggi. Oleh

karena itu dengan pythagoras diperoleh $BE = \sqrt{3}$ sehingga $BP = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Sekali lagi dengan bantuan pythagoras pada diperoleh $TP = \sqrt{\frac{8}{3}}$. Sehingga volume limas segitiga beraturan *T.ABC* yaitu

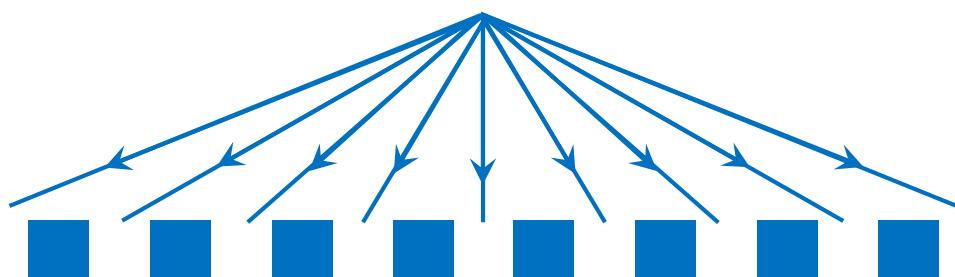
$$\text{Volume Limas } T.ABC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \text{AC} \times \text{BE} \times \text{TP}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{8} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Mengingat limas *T.ABC* sebangun dengan limas *PQRS*, diperoleh

$$\text{Volume Limas } PQRS = \left(\frac{DP}{TP}\right)^3 \times \text{Volume Limas } T.ABC$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{81}$$

Jadi, volume limas segitiga *P.QRS* adalah $\frac{2\sqrt{2}}{81}$ cm^2.

4. Pada suatu acara diundang 13 orang tamu istimewa yang terdiri dari 8 orang pria dan 5 orang wanita. Khusus untuk semua tamu istimewa tersebut disediakan 13 tempat duduk pada satu baris khusus. Jika diharapkan tidak ada dua orang wanita yang duduk bersebelahan, tentukan banyak posisi duduk yang mungkin untuk semua tamu istimewa tersebut.

   Jawab:

   Terlebih dahulu atur tempat duduk 8 pria dalam satu baris yaitu ada 8! cara. Selanjutnya kelima wanita tersebut dapat ditempatkan di sela-sela tempat duduk laki-laki, yaitu ada 9 pilihan tempat duduk yang dapat dipilih oleh kelima wanita tersebut, seperti gambar berikut

Pilihan Tempat Untuk Wanita

Sehingga cara mengatur tempat duduk kelima wanita tersebut adalah $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$ cara.

Jadi, total banyak posisi duduk yang mungkin dari ketiga belas tamu istimewa tersebut adalah $15120 \times 8!$ cara.

5. Sebuah tabel yang berukuran n baris dan n kolom akan diisi dengan bilangan 1 atau –1 sehingga hasil kali semua bilangan yang terletak dalam setiap baris dan hasil kali semua bilangan yang terletak dalam setiap kolom adalah –1. Berapa banyak cara berbeda untuk mengisi tabel tersebut?

Jawab:

Misalkan a_{ij} menyatakan bilangan pada baris ke-i, kolom ke-j. Pertama-tama isi terlebih dahulu tabel $(n - 1) \times (n - 1)$ yang pertama dengan 1 atau –1. Banyaknya cara pengisian jelas ada $2^{(n-1)^2}$. Selanjutnya untuk bilangan-bilangan yang diisikan pada kolom terakhir yaitu kolom ke-n ada tepat satu pilihan, menyesuaikan agar perkalian setiap baris ke-i samadengan -1. Sebagai contoh untuk a_{1n} nilainya tergantung dari hasil $\prod_{i=1}^{n-1} a_{1i}$. Oleh karena itu pengisian bilangan-bilangan pada kolom ke-n adalah unik untuk setiap cara pengisian pada tabel $(n - 1) \times (n - 1)$ yang pertama. Demikian pula untuk pengisian bilangan-bilangan pada baris ke-n juga unik.

Dari sini dapat dilihat bahwa banyaknya cara pengisian tabel $n \times n$ sesuai kriteria pada soal ada maksimal $2^{(n-1)^2}$. Mengapa demikian? Sebab untuk setiap cara pengisian yang diperoleh dari tabel $(n - 1) \times (n - 1)$ yang pertama, bisa jadi kita tidak dapat mengisi kolom ke-n dan baris ke-n sehingga dipenuhi kriteria pada soal. Apa masalahnya? Tentu saja mudah dilihat bahwa untuk mengisi kolom ke-n dari a_{1n} sampai dengan $a_{(n-1)n}$ atau untuk mengisi

baris ke-n dari a_{n1} sampai dengan $a_{n(n-1)}$ tidak ada masalah. Masalahnya terletak pada bilangan a_{nn} karena nilainya ditentukan oleh $\prod_{i=1}^{n-1} a_{in}$ dan $\prod_{i=1}^{n-1} a_{ni}$. Dengan kata lain, untuk menjamin bahwa untuk setiap cara pengisian dari tabel $(n - 1) \times (n - 1)$ yang pertama, kita selalu bisa mengisi bilangan-bilangan pada kolom ke-n dan baris ke-n sehingga kondisi pada soal terpenuhi, harus dibuktikan bahwa $\prod_{i=1}^{n-1} a_{in} = \prod_{i=1}^{n-1} a_{ni}$

Untuk itu, misalkan A adalah hasil perkalian semua bilangan yang diisikan pada tabel

$(n - 1) \times (n - 1)$ yang pertama. Diperoleh

$$A \times \prod_{i=1}^{n-1} a_{in} = (-1)^{n-1}$$

demikian pula

$$A \times \prod_{i=1}^{n-1} a_{ni} = (-1)^{n-1}$$

Dari kedua kesamaan di atas diperoleh

$$\prod_{i=1}^{n-1} a_{in} = \prod_{i=1}^{n-1} a_{ni}$$

seperti yang diharapkan.

Jadi, banyaknya cara pengisian tabel $n \times n$ tersebut adalah $2^{(n-1)^2}$.

DAFTAR PUSTAKA

Sukino. 2012. Three in One Matematika 8 untuk SMP/MTs kelas VIII. Jakarta: Erlangga.

Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit edisi 3. Bandung: Informatika.

___________. 2005. Statistics Higher Secondary - First Year. Goverment of Tamilnadu.

Nikenasih Binatari. 2009. Super Genius Olimpiade Matematika SMP. Yogyakarta: Pustaka Widyatama.

Husein Tampomas. Strategi Cerdik Menghadapi Olimpiade Matematika Seri 1. Jakarta: Grasindo.

Xu Jiagu. 2010. Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses for Junior Section Volume 1.

Beck, Matthias and Ross Geoghegan. 2010. The Art of Proof: Basic Training for Deeper Mathematics.

Zhang,Yao. 2011. Combinatorial Problems in Mathematical Competitions. East China Normal University.

Kenneth Ireland, Michael Rosen, 1990. A Classical Introduction to Modern Number Theory Second Edition, Springer.

_______. 2014. Matematika SMP/MTs kelas VII dan VIII Kurikulum 2013. Pusat Perbukuan Depdiknas.

_____________. 2014. Matematika SMA kelas X dan XI Kurikulum 2013. Pusat Perbukuan Depdiknas.

CHATTING

CHATTING

Siap OSN
Matematika SMP 2015

Menjadi juara OSN?

Mungkinkah pertanyaan di atas menjadi nyata? kenapa tidak. menjadi juara olimpiade matematika selalu terbuka bagi siapapun sepanjang kemauannya kuat dengan belajar giat dan tidak mudah putus asa. buku ini hadir untuk membantu mewujudkan itu dengan menguasai soal-soal latihan di dalam buku ini. lalu apa saja isi buku ini?.

- Dilengkapi ringkasan materi dasar yang diujikan di olimpiade matematika .
- Berisi kumpulan soal lengkap olimpiade matematika SMP tingkat kabupaten/kota, provinsi, dan nasional selama 12 tahun penyelenggaraan (2003 - 2014).
- Pembahasan soal-soal dikerjakan dengan allternatif penyelesaian ajaib sehingga memudahkan siswa dalam memahami dan mengerjakan latihan soal-soal olimpiade matematika.
- Dapat digunakan sebagai referensi bagi pelajar maupun tutor olimpiade matematika untuk mempelajari dan meningkatkan *skill*.

Wahyu